Elemente der Kategorientheorie

Jakob Werner

Elemente und Kategorientheorie in derselben Überschrift? Passt das zusammen? Es passt. In diesem Artikel soll eine Möglichkeit vorgestellt werden, den Elementkalkül der elementaren Mengenlehre in allgemeinen Kategorien zu entwickeln und mit der neu gewonnen Sichtweise Konzepte aus der Kategorie der Mengen auf beliebige Kategorien zu übertragen. Bei diesem Vorgehen werden wir ganz natürlich (wie passend!) auf das bekannte Yoneda-Lemma stoßen, welches uns den Artikel über begleiten wird. Anschließend werden wir einige Konzepte, wie Teilmengen, kartesische Produkte, und Gruppen in allgemeinen Kategorien interpretieren. Zur Lektüre wird kein Vorwissen über Kategorien vorausgesetzt, alles Nötige wird im Artikel eingeführt. Tatsächlich könnte man den Artikel auch als eine unkonventionelle Einführung in einige Konzepte der Kategorientheorie verstehen.

Inhaltsverzeichnis

1 Mengen, Funktionen und Elemente 1

2 Objekte, Morphismen und Elemente 3

3 Das Yoneda-Lemma 4

4 Einige Übersetzungen 5

5 Unterobjekte 6

6 Produkte 8

7 Gruppen 10

8 Die Yoneda-Einbettung 11

1 Mengen, Funktionen und Elemente

Die Begriffe der Menge und der Funktion sind wohlbekannt. Sind X und Y zwei Mengen, so kann man von *Funktionen* $f\colon X \longrightarrow Y$ sprechen. Für jede Menge X hat man eine *identische*

Funktion $\mathrm{id}_X \colon X \longrightarrow X$ und für zwei Funktionen $f \colon X \longrightarrow Y$ und $g \colon Y \longrightarrow Z$ deren *Komposition* $g \circ f \colon X \longrightarrow Z$. Es gelten die folgenden Eigenschaften:

(F1) Ist $f \colon X \longrightarrow Y$ eine Funktion, so gilt $f \circ \mathrm{id}_X = f$.

(F2) Ist $f \colon X \longrightarrow Y$ eine Funktion, so gilt $\mathrm{id}_Y \circ f = f$.

(F3) Sind $f \colon X \longrightarrow Y$, $g \colon Y \longrightarrow Z$ und $h \colon Z \longrightarrow W$ drei Funktionen, so gilt $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

Noch bevor man im ersten Semester Funktionen kennenlernt, spricht man von *Elementen*. Für eine Menge X gibt es den Begriff eines Elements $x \in X$. Fundamental ist, dass man eine Funktion $f \colon X \longrightarrow Y$ an einem Element $x \in X$ auswerten kann, um ein Element $f(x) \in Y$ zu erhalten. Das Zusammenspiel von Elementen und Funktionen wird durch die folgenden Eigenschaften charakterisiert:

(E1) Sind $f, g \colon X \longrightarrow Y$ zwei Funktionen, so gilt $f = g$ genau dann, wenn $f(x) = g(x)$ für alle $x \in X$ gilt.

(E2) Für jede Menge X ist $\mathrm{id}_X \colon X \longrightarrow X$ diejenige (nach **(E1)** eindeutig bestimmte) Funktion mit $\mathrm{id}_X(x) = x$ für alle $x \in X$.

(E3) Für zwei Funktionen $f \colon X \longrightarrow Y$, $g \colon Y \longrightarrow Z$ ist $g \circ f \colon X \longrightarrow Z$ diejenige (nach **(E1)** eindeutig bestimmte) Funktion mit $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ für alle $x \in X$.

Schließlich die wichtigste Eigenschaft, um überhaupt Funktionen angeben zu können:

(E4) Sind X und Y zwei Mengen und ist φ irgendeine „Vorschrift", welche jedem Element $x \in X$ ein Element $\varphi(x) \in Y$ zuordnet, so gibt es auch wirklich eine (gemäß **(E1)** eindeutig bestimmte) Funktion $f \colon X \longrightarrow Y$, welche diese Vorschrift als Funktion realisiert, also $f(x) = \varphi(x)$ für alle $x \in X$ erfüllt.

Es soll hier nicht darum gehen, den Begriff der „Vorschrift" zu präzisieren, vielmehr vertrauen wir darauf, dass die Leserin das Prinzip **(E4)** schon häufig angewendet hat und mit der getroffenen Aussage eine Bedeutung verbindet. Es erlaubt uns beispielsweise, eine Funktion $f \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ durch die Angabe $x \longmapsto x + 1$ zu definieren.

Es sei nun A irgendeine Menge. Dann können wir für jede Menge X die Menge $\widehat{X}(A)$ aller Funktionen $x \colon A \longrightarrow X$ betrachten. Ist $f \colon X \longrightarrow Y$ eine Funktion, so erhalten wir eine induzierte Abbildung $\widehat{f}_A \colon \widehat{X}(A) \longrightarrow \widehat{Y}(A)$, $x \longmapsto f \circ x$.

Außerdem haben wir für ein Element $a \in A$ die *Auswertungsabbildung* $\mathrm{ev}_{a,X} \colon \widehat{X}(A) \longrightarrow X$, $x \longmapsto x(a)$. Es kommutiert dann stets das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \widehat{X}(A) \arrow[r, "\mathrm{ev}_{a,X}"] \arrow[d, "\widehat{f}_A"'] & X \arrow[d, "f"] \\ \widehat{Y}(A) \arrow[r, "\mathrm{ev}_{a,Y}"'] & Y; \end{tikzcd} \tag{1}$$

dies ist gerade die Formel $(f \circ x)(a) = f(x(a))$ für $x \in \widehat{X}(A)$.

In dem Fall, dass $A = \{pt\}$ die einpunktige Menge und $a = pt$ ist, ist die Abbildung $ev_{pt,X}$ eine Bijektion. Wir können also Elemente von X mit Funktionen $\{pt\} \longrightarrow X$ identifizieren und unter dieser Identifikation entspricht anwenden einer Funktion f auf ein Element von X der Komposition von f mit der Funktion $\{pt\} \longrightarrow X$.

2 Objekte, Morphismen und Elemente

Eine *Kategorie* $\mathcal{C}$ besteht aus den folgenden Daten: Man hat *Objekte* $A, B, C, \dots, X, Y, Z, \dots$ und für je zwei Objekte X, Y *Morphismen* $f \colon X \longrightarrow Y$. Außerdem hat man für jedes Objekt X einen Morphismus $id_X \colon X \longrightarrow X$, sowie für zwei Morphismen $f \colon X \longrightarrow Y$, $g \colon Y \longrightarrow Z$ deren *Komposition* $g \circ f \colon X \longrightarrow Z$. Dabei fordert man, dass die folgenden Axiome erfüllt sind:

(F1′) Ist $f \colon X \longrightarrow Y$ ein Morphismus, so gilt $f \circ id_X = f$.

(F2′) Ist $f \colon X \longrightarrow Y$ ein Morphismus, so gilt $id_Y \circ f = f$.

(F3′) Sind $f \colon X \longrightarrow Y$, $g \colon Y \longrightarrow Z$ und $h \colon Z \longrightarrow W$ drei Morphismen, so gilt $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

Wir haben also die Funktionseigenschaften, die für Mengen gelten, abgeschrieben. Beispiele fallen einem sofort einige ein:

Beispiel 2.1. (i) Die Kategorie **Set** der Mengen: Objekte sind Mengen, Morphismen sind Abbildungen.

(ii) Die Kategorie **Mod**(k) der k-Vektorräume: Objekte sind k-Vektorräume, Morphismen sind lineare Abbildungen.

(iii) Die Kategorie **Ring** der Ringe: Objekte sind Ringe, Morphismen sind Ringhomomorphismen.

(iv) Die Kategorie **Top** der topologischen Räume: Objekte sind topologische Räume, Morphismen sind stetige Abbildungen.

Wir würden gerne auch die Elementeigenschaften **(E1)** bis **(E4)** abschreiben können, aber wir haben noch keinen geeigneten Elementbegriff. Im Fall von Mengen haben wir aber gesehen, dass Elemente von X zu speziellen Funktionen nach X korrespondieren. Wir definieren:

Seien A und X Objekte einer Kategorie. Ein *A-Element* von X ist ein Morphismus $x \colon A \longrightarrow X$. Wir schreiben $x \in_A X$ hierfür. Ist $f \colon X \longrightarrow Y$ ein Morphismus, so definieren wir $f(x) := f \circ x$. Es gilt dann $f(x) \in_A Y$. Tatsächlich gilt:

(E1′) Sind $f, g \colon X \longrightarrow Y$ zwei Morphismen, so gilt $f = g$ genau dann, wenn $f(x) = g(x)$ für alle Objekte A und alle $x \in_A X$ gilt.

Beweis. Setze $x = id_X$ ein und verwende **(F1′)**. ∎

(E2′) Für jedes Objekt X ist $\mathrm{id}_X\colon X \longrightarrow X$ derjenige (nach **(E1′)** eindeutig bestimmte) Morphismus mit $\mathrm{id}_X(x) = x$ für alle $x \in_A X$.

Beweis. Dies ist **(F2′)**. ∎

(E3′) Sind $f\colon X \longrightarrow Y$, $g\colon Y \longrightarrow Z$ zwei Morphismen, so ist die Komposition $g \circ f\colon X \longrightarrow Z$ derjenige (nach **(E1′)** eindeutig bestimmte) Morphismus mit $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ für alle $x \in_A X$.

Beweis. Dies ist **(F3′)**. ∎

Die Übertragung von **(E4)** verschieben wir auf den nächsten Abschnitt.

Bemerkung 2.2. Das Konzept der verallgemeinerten Elemente ist insbesondere aus der Stochastik wohlbekannt. Dort sieht man sich mit dem Problem konfrontiert, der anschaulichen Aussage, eine reelle Zahl $X \in \mathbb{R}$, oder allgemeiner ein Element $X \in S$ eines Messraumes, sei *zufällig* gewählt, eine präzise Bedeutung zu geben. Die heute übliche Vorgehensweise ist es, nicht klassische Elemente $X \in \mathbb{R}$ zu betrachten, sondern Ω-Elemente $X \in_\Omega S$, wobei Ω ein ganz beliebiger Messraum ist (um dann wirklich Stochastik betreiben zu können, braucht man noch ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf Ω). Die Ω-Elemente heißen in der Stochastik üblicherweise *Zufallsvariablen*.

Ist $X \in_\Omega S$ eine Zufallsvariable und $f\colon S \longrightarrow T$ eine messbare Abbildung, also ein Morphismus von Messräumen, so ist die Zufallsvariable $f(X) \in_\Omega T$ genau wie bei uns als die Komposition $f \circ X$ definiert.

3 Das Yoneda-Lemma

Wir erinnern noch einmal an

(E4) Sind X und Y zwei Mengen und ist φ irgendeine „Vorschrift", welche jedem Element $x \in X$ ein Element $\varphi(x) \in Y$ zuordnet, so gibt es auch wirklich eine (gemäß **(E1)** eindeutig bestimmte) Funktion $f\colon X \longrightarrow Y$, welche diese Vorschrift als Funktion realisiert, also $f(x) = \varphi(x)$ für alle $x \in X$ erfüllt.

In einer beliebigen Kategorie hat ein Objekt X nicht nur Elemente, sondern es hat A-Elemente für jedes Objekt A. Wir wollen im Folgenden $\widehat{X}(A)$ für die Menge der A-Elemente von X schreiben. Eine *Zuordnungsvorschrift* zwischen den Objekten X und Y sei eine Familie $\varphi = (\varphi_A)_A$ bestehend aus Abbildungen $\varphi_A\colon \widehat{X}(A) \longrightarrow \widehat{Y}(A)$ für jedes Objekt A. Eine Zuordnungsvorschrift ordnet also jedem A-Element $x \in_A X$ von X ein A-Element $\varphi_A(X) \in_A Y$ zu.

Wir haben im letzten Abschnitt gesehen, wie ein Morphismus $f\colon X \longrightarrow Y$ Anlass zu einer Zuordnungsvorschrift $\widehat{f}$ gibt, durch

$$\widehat{f}_A\colon \widehat{X}(A) \longrightarrow \widehat{Y}(A)\,, \qquad x \longmapsto \widehat{f}_A(x) := f(x) := f \circ x\,. \tag{2}$$

Zudem besagt **(E1′)**, dass f durch diese Zuordnungsvorschrift eindeutig bestimmt ist, und wenn wir uns den Beweis zu **(E1′)** ansehen, sehen wir auch, wie: Es ist $f = \widehat{f}_X(\mathrm{id}_X)$.

Es liegt nur nahe, zu fragen, welche Zuordnungsvorschriften auf diese Weise durch Morphismen entstehen. Eine notwendige Bedingung erhalten wir durch die folgende Beobachtung: Ist $h\colon B \longrightarrow A$ ein Morphismus, so gilt

$$\widehat{f}_A(x) \circ h = (f \circ x) \circ h = f \circ (x \circ h) = \widehat{f}_B(x \circ h)\,. \tag{3}$$

Wir nennen daher eine Zuordnungsvorschrift φ *natürlich*, falls die Bedingung

$$\varphi_A(x) \circ h = \varphi_B(x \circ h) \tag{4}$$

für alle $h\colon B \longrightarrow A$ und $x \in_A X$ gilt. Tatsächlich ist diese Eigenschaft auch hinreichend:

(E4′) Sind X und Y zwei Objekte und ist φ eine natürliche Zuordnungsvorschrift zwischen X und Y, so gibt es auch wirklich einen (gemäß **(E1′)** eindeutig bestimmten) Morphismus $f\colon X \longrightarrow Y$, welcher diese Vorschrift realisiert, also $f(x) = \varphi_A(x)$ für alle $x \in_A X$ erfüllt.

Beweis. Falls es einen solchen Morphismus gibt, muss er durch $\varphi_X(\mathrm{id}_X)$ gegeben sein. Wir setzen also $f = \varphi_X(\mathrm{id}_X)$. Für beliebiges $x \in_A X$ gilt dann

$$f(x) = f \circ x = \varphi_X(\mathrm{id}_X) \circ x = \varphi_A(\mathrm{id}_X \circ x) = \varphi_A(x)\,. \qquad \blacksquare$$

Die Eigenschaft **(E4′)** ist auch als *Yoneda-Lemma* bekannt.

4 Einige Übersetzungen

Wir zeigen in diesem Abschnitt anhand von einfachen Beispielen, wie man Konzepten aus der Theorie der Mengen mithilfe des Elementkalküls in jeder Kategorie einen Sinn geben kann.

Beispiel 4.1. Eine Einpunktmenge ist eine Menge T, welche genau ein Element pt hat. Ein Objekt T einer Kategorie heißt *terminal*, falls es für jedes Objekt A genau ein Element $\mathrm{pt}_A \in_A X$ gibt, oder äquivalent, falls $\widehat{X}(A)$ für jedes Objekt A eine Einpunktmenge ist.

Tatsächlich sind Einpunktmengen genau die terminalen Objekte in **Set**.

Beispiel 4.2. Eine Funktion $f\colon X \longrightarrow Y$ heißt injektiv, falls aus $f(x) = f(y)$ für $x, y \in X$ bereits $x = y$ folgt. Einen Morphismus $f\colon X \longrightarrow Y$ in einer Kategorie nennen wir *Monomorphismus*, falls aus $f(x) = f(y)$ für $x, y \in_A X$ bereits $x = y$ folgt, oder äquivalent, falls $\widehat{f}_A\colon \widehat{X}(A) \longrightarrow \widehat{Y}(A)$ für alle Objekte A injektiv ist.

Tatsächlich sind injektive Abbildungen genau die Monomorphismen in **Set**.

Beispiel 4.3. Eine Funktion $f\colon X \longrightarrow Y$ heißt bijektiv, falls es für jedes $y \in Y$ genau ein $x \in X$ gibt mit $f(x) = y$. Einen Morphismus $f\colon X \longrightarrow Y$ in einer Kategorie nennen wir *Isomorphismus*, falls es für jedes $y \in_A Y$ genau ein $x \in_A X$ mit $f(x) = y$ gibt, oder äquivalent, falls $\widehat{f}_A$ für ale Objekte A bijektiv ist.

Lemma 4.4. *Es sei* $f\colon X \longrightarrow Y$ *ein Isomorphismus. Dann gibt es einen eindeutigen Morphismus* $g\colon Y \longrightarrow X$, *welcher* $g \circ f = \mathrm{id}_X$ *und* $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ *erfüllt.*

Beweis. Definiere $\varphi_A = \widehat{f}_A^{-1}\colon \widehat{Y}(A) \longrightarrow \widehat{X}(A)$. Wir wollen zeigen, dass $\varphi_B(y \circ h) = \varphi_A(y) \circ h$. Da $\widehat{f}_B$ bijektiv ist, können wir auf beiden Seiten $\widehat{f}_B$ anwenden und erhalten die äquivalente Gleichung $y \circ h = \widehat{f}_B(\varphi_A(y) \circ h)$, deren Richtigkeit aus der Natürlichkeit von $\widehat{f}$ folgt. Folglich gibt es ein eindeutiges $g\colon Y \longrightarrow X$, welches jedem $y \in_A Y$ sein Urbild $\varphi_A(y)$ zuordnet. ■

Tatsächlich sind bijektive Abbildungen genau die Isomorphismen in **Set**.

Bemerkung 4.5. Ich habe mich hier entschieden, eine Definition von »Isomorphismus« zu wählen, die die größtmögliche Ähnlichkeit zur Definition von »Bijektivität« besitzt, wie man sie aus dem ersten Semester kennt. Sowohl im Fall von Mengen als auch in beliebigen Kategorien ist das eigentliche Wesen von Bijektionen bzw. Isomorphismen aber die Existenz von Inversen, die wir hier in Lemma 4.4 bewiesen haben. Auch um Bijektivität bzw. die Eigenschaft, ein Isomorphismus zu sein, nachzuweisen, ist für gewöhnlich die Angabe eines Inversen der richtige Weg.

Warnung 4.6. Man könnte versuchen, auf naheliegende Weise Surjektivität zu übersetzen: Ein Morphismus $f\colon X \longrightarrow Y$ heiße *naiv-surjektiv*, falls es für jedes $y \in_A Y$ ein $x \in_A X$ gibt mit $f(x) = y$. Diese Bedingung ist äquivalent zur Existenz eines Morphismus $g\colon Y \longrightarrow X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ (warum?). In den meisten Kategorien ist diese Bedingung viel stärker als das, was man sich wirklich unter einem »surjektiven« Morphismus vorstellt. In der Kategorientheorie nennt man naiv-surjektive Morphismen üblicherweise *spaltende Epimorphismen*.

Die Aussage, dass in **Set** jede surjektive Funktion ein spaltender Epimorphismus ist, ist äquivalent zum Auswahlaxiom.

5 Unterobjekte

Es sei X ein Objekt einer Kategorie. Ein *Unterobjekt* von X ist ein Paar (U, i) bestehend aus einem Objekt U und einem Monomorphismus $i\colon U \longrightarrow X$, welchen wir die *Inklusion* des Unterobjekts nennen. Wir schreiben auch $U \subseteq_i X$, um auszudrücken, dass (U, i) ein Unterobjekt von X ist. Ist $x \in_A X$, so sagen wir, x *liege in* (U, i) und schreiben $x \in_i U$, falls es ein $x' \in_A U$ gibt mit $i(x') = x$. Da i ein Monomorphismus ist, ist ein solches x' in diesem Fall eindeutig bestimmt. Sind $U \subseteq_i X$ und $V \subseteq_j X$, so sagen wir, (U, i) sei in (V, j) *enthalten* und schreiben $(U, i) \leqslant (V, j)$, falls für $x \in_A X$ aus $x \in_i U$ stets $x \in_j V$ folgt.

Offenbar werden die Unterobjekte von X durch $\leqslant$ prägeordnet, das heißt, die Relation $\leqslant$ ist reflexiv und transitiv. Folglich wird durch $(U, i) \cong (V, j) \iff (U, i) \leqslant (V, j) \leqslant (U, i)$ eine Äquivalenzrelation definiert. Wir nennen (U, i) und (V, j) *äquivalente Unterobjekte*, falls $(U, i) \cong (V, j)$ gilt. Man beachte, dass definitionsgemäß ein Unterobjekt durch die Elemente, die es enthält, bis auf Äquivalenz eindeutig festgelegt ist.

Lemma 5.1. *Es sei* $f\colon X \longrightarrow Y$ *ein Morphismus und* $U \subseteq_i Y$ *ein Unterobjekt. Dann sind äquivalent:*

(i) *Es gilt* $f(x) \in_i U$ *für alle* $x \in_A X$.

(ii) f *faktorisiert über* (U, i)*, das heißt, es gibt ein eindeutig bestimmtes* $s \colon X \longrightarrow U$ *mit* $f = i \circ s$*:*

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[d, hook, "i"] \\ X \arrow[ur, dashed, "s"] \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd} \tag{5}$$

Beweis. »(i) $\Longrightarrow$ (ii)«: Die Voraussetzung (i) bedeutet, dass es für $x \in_A X$ ein (eindeutig bestimmtes) $y' \in U$ gibt mit $i(y') = f(x)$. Wir bezeichnen dieses y' mit $\varphi_A(x)$ und müssen zeigen, dass die so definierte Zuordnungsvorschrift $\varphi_A \colon \widehat{X}(A) \longrightarrow \widehat{U}(A)$ natürlich ist, das heißt, wir wollen die Gleichung $\varphi_A(x) \circ h = \varphi_B(x \circ h)$ für $h \colon B \longrightarrow A$. Es gilt aber

$$i(\varphi_A(x) \circ h) = i(\varphi_A(x)) \circ h = f(x) \circ h = f(x \circ h) = i(\varphi_A(x \circ h)) \,.$$

Da i ein Monomorphismus ist, folgt die Natürlichkeit und wir können den Morphismus s durch die Zuordnung φ definieren; es gilt dann nach Konstruktion $i(s(x)) = f(x)$ für alle $x \in_A X$.

»(ii) $\Longrightarrow$ (i)«: Setzen wir $y' := s(x) \in_A U$, so gilt $i(y') = f(x)$, das bedeutet per Definition, dass $f(x) \in_i U$ gilt. ∎

Bemerkung 5.2. Man beachte, dass das Vorgehen im obigen Beweis erzwungen ist: Wir müssen s so definieren, dass für $x \in_A X$ die Gleichung $i(s(x)) = f(x)$ erfüllt ist. Das Yoneda-Lemma **(E4′)** erlaubt es uns, s tatsächlich durch diese Zuordnungsvorschrift zu definieren. Wir können uns die Wirkungsweise des Yoneda-Lemmas an diesem Beispiel noch einmal klarmachen. Der ganze Trick im Beweis des Yoneda-Lemmas war es ja, das »universelle Element« $\mathrm{id}_X \in_X X$ zu betrachten. Betrachten wir dieses Element in der Situation von (i), so können wir also folgern, dass $f = f(\mathrm{id}_X) \in_i U$. Das bedeutet per Definition, dass f über (U, i) faktorisiert.

Lemma 5.1 zeigt insbesondere, dass für zwei Unterobjekte $U \subseteq_i X$, $V \subseteq_j X$ genau dann $(U, i) \leqslant (V, j)$ gilt, wenn i über (V, j) faktorisiert. In diesem Fall ist das eindeutig bestimmte $s \colon U \longrightarrow V$, welches $j \circ s = i$ erfüllt, selbst wieder ein Monomorphismus. Gilt $(U, i) \cong (V, j)$, so sind die Faktorisierungen inverse Isomorphismen.

Beispiel 5.3. Es seien $f, g \colon X \longrightarrow Y$ zwei Morphismen. Der *Differenzkern* von f und g (falls er existiert) ist ein Unterobjekt $\mathrm{Ker}(f, g) \subseteq_i X$ mit der Eigenschaft, dass für $x \in_A X$ genau dann $x \in_i \mathrm{Ker}(f, g)$ gilt, wenn $f(x) = g(x)$ ist. Hierdurch ist der Differenzkern bis auf Äquivalenz von Unterobjekten eindeutig festgelegt.

Sind wir in einer Kategorie $\mathcal{C}$, in der es Sinn macht, von einem Nullmorphismus zwischen zwei Objekten zu sprechen (eine sogenannte *punktierte Kategorie*), also etwa in der Kategorie der Gruppen, der k-Vektorräume, oder (etwas exotischer) der Kategorie der punktierten topologischen Räume, so ist der *Kern* eines Morphismus $f \colon X \longrightarrow Y$ definiert als $\mathrm{Ker}(f, 0) \subseteq_i X$. Für Gruppen und Vektorräume erhalten wir den gewöhnlichen Kern mit seiner Inklusionsabbildung. Für punktierte topologische Räume erhalten wir die Faser des Basispunktes.

Aufgabe 5.4. Definiere den *Durchschnitt* von zwei Unterobjekten $U \subseteq_i X$, $V \subseteq_j X$. Definiere das *Urbild* eines Unterobjektes $U \subseteq_i Y$ entlang eines Morphismus $f\colon X \longrightarrow Y$.

Falls Faserprodukte bekannt sind: Was hat beides damit zu tun?

6 Produkte

Das kartesische Produkt zweier Mengen X und Y wird üblicherweise folgendermaßen charakterisiert: Die Elemente von $X \times Y$ sind Paare $p = (x, y)$ mit $x \in X$ und $y \in Y$. Zwei solche Paare sind genau dann gleich, wenn ihre Komponenten übereinstimmen. Dabei ist natürlich die Operation, welche einem solchen Paar seine erste bzw. zweite Komponente zuordnet, eine Funktion von $X \times Y$ nach X bzw. Y. Die Definition ließe sich also auch so formulieren: Das Produkt von X und Y besteht aus einer Menge $X \times Y$ und zwei Funktionen $\pi_1\colon X \times Y \longrightarrow X$ und $\pi_2\colon X \times Y \longrightarrow Y$ mit der folgenden Eigenschaft: Für je zwei Elemente $x \in X$, $y \in Y$ gibt es ein eindeutig bestimmtes $p \in X \times Y$ so, dass $\pi_1(p) = x$ und $\pi_2(p) = y$. Für das durch x und y eindeutig bestimmte Element schreibt man dann $p = (x, y)$. Der aufmerksamen Leserin wird nicht entgangen sein, dass diese Formulierung in jeder Kategorie sinnvoll ist...

Definition 6.1. Es seien X und Y Objekte einer Kategorie $\mathcal{C}$. Ein *Produkt* von X und Y besteht aus einem Objekt $X \times Y$ zusammen mit zwei Morphismen $\pi_1\colon X \times Y \longrightarrow X$ und $\pi_2\colon X \times Y \longrightarrow Y$ mit der folgenden Eigenschaft: Für $x \in_A X$ und $y \in_A Y$ gibt es ein eindeutiges $p \in_A X \times Y$ mit $\pi_1(p) = x$ und $\pi_2(p) = y$. Wir bezeichnen dieses Element p mit (x, y).

Es ergeben sich sofort die folgenden Eigenschaften:

Lemma 6.2. *Es seien X und Y zwei Objekte und $X \times Y$ mit den Morphismen π_1 und π_2 ihr Produkt. Dann gilt:*

(i) *Für je zwei Elemente $p, q \in_A X \times Y$ gilt $p = q$ genau dann, wenn $\pi_1(p) = \pi_1(q)$ und $\pi_2(p) = \pi_2(q)$.*

(ii) *Für $p \in_A X \times Y$ gilt $p = (\pi_1(p), \pi_2(p))$.*

(iii) *Für $(x, y) \in_A X \times Y$ und $h\colon B \longrightarrow A$ gilt $(x, y) \circ h = (x \circ h, y \circ h)$.*

Beweis. (i) Dies ist die Eindeutigkeit des Elements p in Definition 6.1.

(ii) Dies folgt sofort aus (i).

(iii) Dies folgt sofort aus (i). ∎

Wir wollen nun vorführen, wie man mit Produkten und dem Yoneda-Lemma in beliebigen Kategorien arbeiten kann. Wir gehen dazu im Folgenden davon aus, dass je zwei Objekte der Kategorie $\mathcal{C}$ ein Produkt besitzen.

Satz 6.3. *Es seien X, Y, Z Objekte. Dann gibt es einen Morphismus $\alpha_{X,Y,Z}\colon (X \times Y) \times Z \longrightarrow X \times (Y \times Z)$ mit*

$$\alpha_{X,Y,Z}((x, y), z) = (x, (y, z)) \tag{6}$$

für $x \in_A X$, $y \in_A Y$, $z \in_A Z$.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass die Zuordnungsvorschrift $\varphi_A((x,y),z) := (x,(y,z))$ natürlich ist. Das folgt aber leicht mit Lemma 6.2:

$$\begin{aligned}\varphi_B\big(((x,y),z)\circ h\big) &= \varphi_B\big(((x\circ h, y\circ h), z\circ h)\big)\\ &= (x\circ h,(y\circ h, z\circ h))\\ &= (x,(y,z))\circ h\\ &= \varphi_A((x,y),z)\circ h\,.\end{aligned}$$

Nun lässt sich das Yoneda-Lemma anwenden. ∎

Der Morphismus $\alpha_{X,Y,Z}$ heißt der *Assoziator*.

Bemerkung 6.4. In dem Beweis geht natürlich ein, dass jedes A-Element von $(X\times Y)\times Z$ auf eindeutige Weise die Form $((x,y),z)$ für $x\in_A X$, $y\in_A Y$ und $z\in_A Z$ besitzt, was aus der Definition von Produkten folgt. Da aus demselben Grund jedes A-Element von $X\times(Y\times Z)$ auf eindeutige Weise die Form $(x,(y,z))$ hat, ist $\alpha_{X,Y,Z}$ sogar ein Isomorphismus im Sinne von Beispiel 4.3.

Genauso kann man zeigen:

Aufgabe 6.5. Es seien $f\colon X\longrightarrow X'$, $g\colon Y\longrightarrow Y'$ Morphismen. Dann gibt es einen Morphismus $f\times g\colon X\times Y\longrightarrow X'\times Y'$ mit

$$(f\times g)(x,y) = (f(x),g(y)) \tag{7}$$

für $x\in_A X$, $y\in_A Y$.

Auf ähnliche Weise sieht man, dass man alle »typischen« Funktionen, die man vom kartesischen Produkt von Mengen her kennt, auch in beliebigen Kategorien definieren kann.

Aufgabe 6.6. Zeige die Kommutativität des *Pentagon-Diagrammes*:

$$\begin{tikzcd}
 & ((W\times X)\times Y)\times Z \arrow[rr, "\alpha_{W,X,Y}\times\mathrm{id}_Z"] \arrow[dl, "\alpha_{W\times X,Y,Z}"'] & & (W\times(X\times Y))\times Z \arrow[dr, "\alpha_{W,X\times Y,Z}"] & \\
(W\times X)\times(Y\times Z) \arrow[drr, "\alpha_{W,X,Y\times Z}"'] & & & & W\times((X\times Y)\times Z) \arrow[dll, "\mathrm{id}_W\times\alpha_{X,Y,Z}"] \\
 & & W\times(X\times(Y\times Z)) & &
\end{tikzcd}$$

7 Gruppen

Wir wollen nun davon ausgehen, dass unsere Kategorie Produkte und ein terminales Objekt T besitzt. Es sei G ein Objekt und es seien Morphismen $\mu\colon G \times G \longrightarrow G$, $\iota\colon G \longrightarrow G$ und $\eta\colon T \longrightarrow G$ gegeben. Sind $x, y \in_A G$, so schreiben wir $x \cdot y \in_A G$ für das A-Element $\mu(x, y)$, sowie $x^{-1} \in_A G$ für das A-Element $\iota(x)$. Schließlich schreiben wir $1_A \in_A G$ für das Element $\eta(\mathrm{pt}_A)$. Wir nennen das Datum (G, μ, ι, η) eine *Gruppe*, wenn gilt:

(G1) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ für $x, y, z \in_A G$.

(G2) $x \cdot 1_A = x = 1_A \cdot x$ für alle $x \in_A G$.

(G3) $x \cdot x^{-1} = 1_A = x^{-1} \cdot x$ für alle $x \in_A G$.

Man hätte die Gruppenaxiome auch durch große kommutative Diagramme ausdrücken können. So besagt beispielsweise das erste Gruppenaxiom genau, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & (G \times G) \times G \arrow[rr, "\alpha_{G,G,G}"] \arrow[dl, "\mu \times \mathrm{id}_G"'] & & G \times (G \times G) \arrow[dr, "\mathrm{id}_G \times \mu"] & \\
G \times G \arrow[drr, "\mu"'] & & & & G \times G \arrow[dll, "\mu"] \\
 & & G & &
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Mithilfe von Elementen lässt sich das aber viel anschaulicher ausdrücken.

Wir können den Gruppenbegriff für (fast) beliebige Kategorien also einfach abschreiben. Man kann nun anfangen, Einiges an Gruppentheorie in beliebigen Kategorien zu übersetzen. Sind zum Beispiel (G, μ, ι, η), $(G', \mu', \iota', \eta')$ zwei Gruppen, so ist ein *Gruppenhomomorphismus* zwischen diesen Gruppen ein Morphismus $f\colon G \longrightarrow G'$, welcher die Gleichungen

(H1) $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ für $x, y \in_A G$,

(H2) $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$ für $x \in_A G$,

(H3) $f(1_A) = 1_A$

erfüllt.

Aufgabe 7.1. Man zeige, dass in einer Gruppe in einer Kategorie die Gleichung $(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}$ für $x, y \in_A G$ gilt.

Man zeige, dass $f\colon G \longrightarrow G'$ bereits dann ein Homomorphismus ist, wenn $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ für $x, y \in_A G$ erfüllt ist.

Beispiel 7.2. (i) Eine Gruppe in der Kategorie der Mengen ist eine gewöhnliche Gruppe.

(ii) Eine Gruppe in der Kategorie der topologischen Räume ist eine topologische Gruppe.

(iii) Eine Gruppe in der Kategorie der glatten Mannigfaltigkeiten ist eine Lie-Gruppe.

(iv) Eine Gruppe in der Kategorie der Gruppen ist dasselbe wie eine abelsche Gruppe. Dies ist eine Version des Eckmann-Hilton-Arguments.

(v) Eine Gruppe in der Kategorie der Mengengarben auf einem Raum ist eine Gruppengarbe.

Aufgabe 7.3. Interpretiere $\mathbb{R}$ als additive Gruppe in der Kategorie der Messräume. Überzeuge Dich, dass die Summe zweier Elemente $X, Y \in_\Omega \mathbb{R}$ mit der üblichen punktweisen Summe von Zufallsvariablen, wie man sie aus der Stochastik kennt, übereinstimmt.

Aufgabe 7.4. Es sei (G, μ, ι, η) eine Gruppe und $U \subseteq_i G$. Zeige die Äquivalenz der folgenden Bedingungen:

(i) Für jedes Objekt A gilt:

(U1) $1_A \in_i U$.

(U2) $x, y \in_i U \implies x \cdot y \in_i U$ für alle $x, y \in_A G$.

(U3) $x \in_i U \implies x^{-1} \in_i U$ für alle $x \in_A G$.

(ii) Es gibt eine Gruppenstruktur (U, μ', ι', η') derart, dass $i \colon U \longrightarrow G$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

In diesem Fall ist die Gruppenstruktur aus (ii) eindeutig bestimmt.

8 Die Yoneda-Einbettung

Es sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und X ein Objekt in $\mathcal{C}$. Wir haben weiter oben jedem Objekt A von $\mathcal{C}$ eine *Menge*, nämlich die Menge $\widehat{X}(A)$ aller A-Elemente von X zugeordnet. Jedem Morphismus $h \colon B \longrightarrow A$ können wir eine Abbildung

$$\widehat{X}(h) \colon \widehat{X}(A) \longrightarrow \widehat{X}(B), \qquad x \longmapsto x \circ h \tag{8}$$

zuordnen. Man beachte, dass $\widehat{X}(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{\widehat{X}(A)}$ sowie für $k \colon C \longrightarrow B$ die Verträglichkeit $\widehat{X}(h \circ k) = \widehat{X}(k) \circ \widehat{X}(h)$ gilt — letzteres ist einfach die Assoziativität der Komposition.

Wir wollen dieses Phänomen abstrahieren. Eine *Prägarbe* auf $\mathcal{C}$ sei eine Vorschrift, welche jedem Objekt A von $\mathcal{C}$ eine Menge $F(A)$ und jedem Morphismus $h \colon B \longrightarrow A$ eine Abbildung $F(h) \colon F(A) \longrightarrow F(B)$ zuordnet. Dabei fordern wir, dass stets gilt:

(P1) $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$,

(P2) $F(h \circ k) = F(k) \circ F(h)$.

Als nächstes beachte man, dass sich unsere Definition von »natürliche Zuordnungsvorschrift«, wie wir sie in Abschnitt 3 getroffen haben, allein mit den Daten der Prägarbe $\widehat{X}$ ausdrücken lässt: Die definierende Gleichung (4) besagt nichts anderes als die Kommutativität des folgenden Diagrammes:

$$\begin{tikzcd} \widehat{X}(A) \arrow[r, "\varphi_A"] \arrow[d, "\widehat{X}(h)"'] & \widehat{Y}(A) \arrow[d, "\widehat{Y}(h)"] \\ \widehat{X}(B) \arrow[r, "\varphi_B"'] & \widehat{Y}(B) \end{tikzcd} \tag{9}$$

Wir verallgemeinern: Sind F, G zwei Prägarben auf $\mathcal{C}$, so sei eine *natürliche Transformation* $\varphi\colon F \longrightarrow G$ eine Familie $\varphi = (\varphi_A)_A$ von Abbildungen $\varphi_A\colon F(A) \longrightarrow G(A)$ derart, dass für alle Morphismen $h\colon B \longrightarrow A$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\varphi_A"] \arrow[d, "F(h)"'] & G(A) \arrow[d, "G(h)"] \\ F(B) \arrow[r, "\varphi_B"'] & G(B) \end{tikzcd} \tag{10}$$

kommutiert. Eine natürliche Transformation $\varphi\colon \widehat{X} \longrightarrow \widehat{Y}$ ist also nichts anderes als eine natürliche Zuordnungsvorschrift in unserem früheren Sinne.

Sind $\varphi\colon F \longrightarrow G$ und $\psi\colon G \longrightarrow H$ zwei natürliche Transformationen, so wird durch $(\psi \circ \varphi)_A = \psi_A \circ \varphi_A$ eine natürliche Transformation $\psi \circ \varphi\colon F \longrightarrow H$ definiert, wie man an der Kommutativität des Diagrammes

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\varphi_A"] \arrow[d, "F(h)"'] & G(A) \arrow[r, "\psi_A"] \arrow[d, dashed, "G(h)"] & H(A) \arrow[d, "H(h)"] \\ F(B) \arrow[r, "\varphi_B"'] & G(B) \arrow[r, "\psi_B"'] & H(B) \end{tikzcd} \tag{11}$$

erkennt. Dies zeigt, dass die Prägarben auf $\mathcal{C}$ zusammen mit den natürlichen Transformationen als Morphismen selbst wieder eine Kategorie $\widehat{\mathcal{C}}$ bilden.

Wir haben also für jedes Objekt X aus $\mathcal{C}$ eine Prägarbe $\widehat{X}$. Zudem liefert jeder Morphismus $f\colon X \longrightarrow Y$ — dies ist die Beobachtung der Gleichung (3) aus Abschnitt 3 — eine natürliche Transformation $\widehat{f}\colon \widehat{X} \longrightarrow \widehat{Y}$. Es gilt hierbei $\widehat{g \circ f} = \widehat{g} \circ \widehat{f}$ falls $f\colon X \longrightarrow Y$, $g\colon Y \longrightarrow Z$ zwei Morphismen sind. Man sagt auch, die Zuordnung

$$\mathcal{C} \longrightarrow \widehat{\mathcal{C}}, \qquad X \longmapsto \widehat{X}, \qquad f \longmapsto \widehat{f} \tag{12}$$

sei ein *Funktor*.

Wir können das Yoneda-Lemma **(E4')** in der neuen Sprache umformulieren:

Satz 8.1 (Yoneda-Lemma)**.** *Für je zwei Objekte* X, Y *aus* $\mathcal{C}$ *ist die Abbildung*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(\widehat{X}, \widehat{Y}) \,, \qquad f \longmapsto \widehat{f} \tag{13}$$

eine Bijektion.

Die Umkehrabbildung ist, wie wir gesehen haben, durch $\varphi \longmapsto \varphi_X(\mathrm{id}_X)$ gegeben.

Bemerkung 8.2. Man nennt den Funktor (12) die *Yoneda-Einbettung*. Das Yoneda-Lemma in der Formulierung aus Satz 8.1 drückt aus, dass die Yoneda-Einbettung Morphismen in $\mathcal{C}$ in eine Eins-zu-Eins-Beziehung mit Morphismen in der größeren Kategorie $\widehat{\mathcal{C}}$ setzt. Man mag sich fragen, was denn nun der Nutzen davon sei, eine Kategorie einzubetten in die viel größere und komplizierte Kategorie der Prägarben auf $\mathcal{C}$. Genau diese Frage hat der Artikel versucht, zu beantworten (bevor sie überhaupt gestellt wurde): Prägarben sind einfach nur parametrisierte Mengen. Morphismen von Prägarben sind einfach nur parametrisierte Abbildungen. Wir können Abbildungsvorschriften hinschreiben und dadurch Morphismen definieren, wie man es bei Mengen gewohnt ist.

Gerade wenn die Objekte von $\mathcal{C}$ selbst sehr kompliziert sind, wie beispielsweise die Schemata der algebraischen Geometrie, kann dieser Wechsel der Perspektive eine große Vereinfachung darstellen. Zum Beispiel ist es ohne ein Yoneda-artiges Argument praktisch unmöglich die Assoziativität von Produkten (d.h. die Existenz und Isomorphieeigenschaft des Assoziators $\alpha_{X,Y,Z}$) in der Kategorie $\mathbf{Sch}/S$ der Schemata über S zu beweisen (diese heißen auch *Faserprodukte* über S).

Aufgabe 8.3. Es sei X ein Objekt aus $\mathcal{C}$ und F eine Prägarbe auf $\mathcal{C}$. Zeige durch Konstruktion einer Umkehrabbildung, dass die Abbildung

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(\widehat{X}, F) \longrightarrow F(X) \,, \qquad \varphi \longmapsto \varphi_X(\mathrm{id}_X) \tag{14}$$

eine Bijektion ist. Interpretiere Satz 8.1 als Spezialfall hiervon.

Bemerkung 8.4. Aufgabe 8.3 ist ebenfalls als Yoneda-Lemma oder das *volle* Yoneda-Lemma bekannt. Ich habe mich dafür entschieden, mich auf **(E4')** bzw. Satz 8.1 zu konzentrieren, da dies für viele Anwendungen ausreicht und eine offensichtlichere Interpretation durch den Elementkalkül besitzt.