Mathematik-Schulprojekt “Linearer Gleichungszauber”

Heinrich Puschmann, 20.03.2013

Bruchzahlrechnung

Es sei ein lineares Gleichungssystem in der Form:

$$\begin{array}{rcl} x_3 &=& (\; -5x_1 \; +2x_2 \;) \, / \, 1 \\ x_4 &=& (\; -3x_1 \; +\; x_2 \;) \, / \, 1 \\ x_5 &=& (\; +7x_1 \; -3x_2 \;) \, / \, 1 \end{array}$$

Dieses Gleichungssystem enthält unabhängige Variablen x_1, x_2 und freigelegte (aufgelöste, abhängige) Variablen x_3, x_4, x_5: die unabbhängigen Variablen können wir auf beliebige Werte setzen, während der Wert der freigelegten Variablen gänzlich vom Wert der unabhängigen Variablen bestimmt ist. (Man könnte vielleicht beanstanden, dass die obigen homogenen Gleichungen ungewöhnlich seien, weil sie keine “konstanten Einträge” enthalten, aber dem ist nicht so: es genügt ja, $x_1 = 1$ oder $x_2 = 1$ zu setzen, um ein herkömmliches System zu erhalten)

Wir können nun in so einem System eine unabhängige und eine freigelegte Variable miteinander vertauschen, und dabei ein neues Gleichungssystem erhalten. Wenn wir die x_3-Gleichung verwenden um x_1 freizulegen, erhalten wir das Sytem

$$\begin{array}{rcl} x_1 &=& (\; -\; x_3 \; +2x_2 \;) \, / \, 5 \\ x_4 &=& (\; +3x_3 \; -\; x_2 \;) \, / \, 5 \\ x_5 &=& (\; -7x_3 \; -\; x_2 \;) \, / \, 5 \end{array}$$

Eine solche Operation nennt man auch “Pivotschritt” weshalb diese Art von Gleichunssystemen auch “Pivotsysteme” genannt werden. Der Eintrag $-5/1$ von $x_3 = (-5\,x_1 + \cdots)/1$ im ersten Gleichungssystem nennt sich Pivoteintrag oder “Pivotelement”, er muss verschieden von Null sein, um die Variablen x_1 und x_3 miteinander vertauschen zu können. Es ist empfehlenswert, hier mit Bruchzahlen zu arbeiten, wobei wir einen einzigen gemeinsamen Nenner für alle Einträge des Gleichunssystems wählen. **Dieser gemeinsame Nenner braucht nicht gesucht zu werden:** *falls* das Startsystem ganzzahlige Einträge wie oben hat, dann ist der Zähler des jeweiligen Pivotelements *immer* der gemeinsame Nenner des Systems nach dem Pivotschritt.

Die Einträge des eines Gleichungssystems von beliebiger Größe ändern sich nach dem Schema

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \delta\, x_i &=& (\ \alpha)\, x_j \;+\; (\ \sigma)\, x_s \\ \delta\, x_r &=& (\ \zeta)\, x_j \;+\; (\ p)\, x_s \end{array}} \quad x_r \leftrightarrow x_s \quad \boxed{\begin{array}{rcl} p\, x_i &=& (\frac{\alpha p - \zeta\sigma}{\delta})\, x_j \;+\; (\ \sigma)\, x_r \\ p\, x_s &=& (\ -\zeta)\, x_j \;+\; (\ \delta)\, x_r \end{array}}$$

Hier steht das Zeichen δ für den gemeinsamen Nenner des Gleichungssystems, das Zeichen p für den Zähler des *Pivot*eintrags, ζ für einen sonstigen Eintrag der Pivot*zeile*, σ für einen sonstigen Eintrag der Pivot*spalte*, und α für einen beliebigen Eintrag *abseits* von Pivotzeile und Pivotspalte. Bei allen Einträgen abseits von Pivotzeile und Pivotspalte muss durch den alten gemeinsamen Nenner δ geteilt werden: **falls diese Teilung nicht ganzzahlig aufgeht, ist irgendwo ein Rechenfehler!** Natürlich könnte die Teilung auch trotz Rechenfehler ganzzahlig aufgehen, aber das wäre ein nicht sehr häufiger Zufall.

Dualität

Jedem Gleichungssystem in der obigen “homogenen Buchungsform”

$$
\begin{array}{rcllll}
x_3 & = & (& -5x_1 & +2x_2 &)\ /\ 1 \\
x_4 & = & (& -3x_1 & +\ x_2 &)\ /\ 1 \\
x_5 & = & (& +7x_1 & -3x_2 &)\ /\ 1
\end{array}
$$

lässt sich ein zweites, sogenanntes “duales Gleichungssystem” zuordnen; die Koeffizientenmatrix dieses dualen Gleichungssystems ist die negative Transposition der Koeffizientenmatrix des ursprünglichen Systems:

$$
\begin{array}{rclllll}
y_1 & = & (& +5y_3 & +3y_4 & -7y_5) & /\ 1 \\
y_2 & = & (& -2y_3 & -\ y_4 & +3y_5) & /\ 1
\end{array}
$$

Interessanterweise **bleibt diese Beziehung der Koeffizienten** zwischen dem ursprünglichen System, dem sogenannten “Primalsystem”, und dem neuerstellten “Dualsystem” **erhalten, wenn wir beide Systeme so umformen**, dass wir eine der unabhängigen Variablen nach einer der freigelegten Vatiablen auflösen; wichtig ist dabei nur, dass die Indices der ausgetauschten Variablen in beiden Aufgaben diesselben sind. Wenn das Primalsystem die Form

$$
\begin{array}{rcllll}
x_1 & = & (& -\ x_3 & +2x_2 &)\ /\ 5 \\
x_4 & = & (& +3x_3 & -\ x_2 &)\ /\ 5 \\
x_5 & = & (& -7x_3 & -\ x_2 &)\ /\ 5
\end{array}
$$

annimmt, wird aus dem Dualsystem

$$
\begin{array}{rclllll}
y_3 & = & (& +\ y_1 & -3y_4 & +7y_5) & /\ 5 \\
y_2 & = & (& -2y_1 & +\ y_4 & +\ y_5) & /\ 5
\end{array}
$$

Diese Dualitätsbeziehung **lässt sich sehr einfach an einem Pivotsystem beweisen**, das nur zwei unabhängige Variable und zwei freigelegte Variable enthält. Man erhält dasselbe Gleichungssystem, wenn man zuerst zwei der Variablen austauscht und danach das Dualsystem herleitet oder wenn man diese Schritte in umgekehrter Reihenfolge tut:

$$
\begin{array}{ccc}
\boxed{\begin{array}{rcl}
\delta\, x_i & = & (\ \alpha)\, x_j + (\ \sigma)\, x_s \\
\delta\, x_r & = & (\ \zeta)\, x_j + (\ p)\, x_s
\end{array}}
& x_r \leftrightarrow x_s &
\boxed{\begin{array}{rcl}
p\, x_i & = & (\frac{\alpha p-\zeta\sigma}{\delta})\, x_j + (\ \sigma)\, x_r \\
p\, x_s & = & (\ -\zeta)\, x_j + (\ \delta)\, x_r
\end{array}} \\
-[\cdots]^T & & -[\cdots]^T \\
\boxed{\begin{array}{rcl}
\delta\, y_j & = & (-\alpha)\, y_i + (-\zeta)\, y_r \\
\delta\, y_s & = & (-\sigma)\, y_i + (-p)\, y_r
\end{array}}
& y_s \leftrightarrow y_r &
\boxed{\begin{array}{rcl}
p\, y_j & = & (\frac{\zeta\sigma-\alpha p}{\delta})\, y_i + (\ \zeta)\, y_s \\
p\, y_r & = & (\ -\sigma)\, y_i + (-\delta)\, y_s
\end{array}}
\end{array}
$$

(Es ist zu empfehlen, das obige Schema selber herzuleiten)