Das Ziegenproblem

Stand: 31. Mai 2003

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In diesem Artikel wird das Ziegenproblem genauer untersucht, einmal mit einer runden und einmal mit einer quadratischen Wiese. Anzumerken ist, dass in *keinem Fall* die Lösung auf analytischem Wege erzielt wird, sondern es letzlich auf Nullstellenbestimmung einer transzendenten Funktion hinauslief.

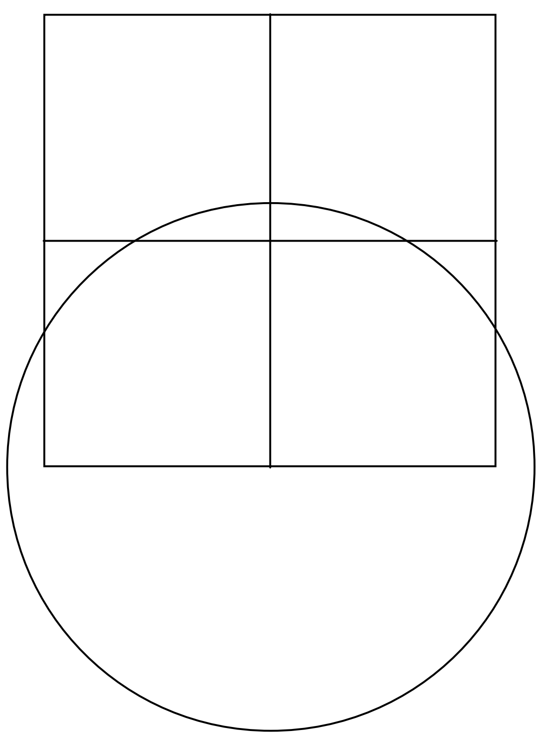
An dieser Stelle möchte ich jeden Interessierten dazu ermuntern, nach weiteren Lösungswegen zu suchen!

2 Ziegenproblem Variante 1

2.1 Aufgabenstellung

Ein Bauer habe eine quadratische Wiese und eine Ziege. Die Ziege sei in der Mitte einer Wiesenseite mit einer Leine angebunden.

Die Frage ist nun, wie lang die Leine sein muss, damit die Ziege genau die Hälfte der Wiese abgrasen kann.



2.2 Lösungmöglichkeit 1

Die Fläche, die die Ziege abgrasen kann, läßt sich durch

$$F = \sqrt{r^2 - x^2}$$

beschreiben. Unter obigen Voraussetzungen hat die Wiese die Fläche 4, und da die Ziege genau die Hälfte abfressen soll, werden die Integrationsgrenzen zu $[-1, 1]$ gesetzt:

$$2 = \int_{-1}^{1} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx.$$

Unsere Aufgabe ist es nun, dieses Integral zu lösen. Im BRONSTEIN findet man unter Nr. 157:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \text{ arcsin } \frac{x}{a}\right)$$

Also berechnen wir

$$\begin{aligned}
2 &= \int_{-1}^{1} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx \\
&= \left[\frac{1}{2}\left(x\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 \text{ arcsin } \frac{x}{r}\right)\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{2}\left(1\sqrt{r^2 - 1} + r^2 \text{ arcsin } \frac{1}{r}\right) - \left[\frac{1}{2}\left(-1 \cdot \sqrt{r^2 - 1} + r^2 \text{ arcsin } \frac{-1}{r}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{r^2 - 1} + \frac{1}{2}r^2 \text{ arcsin } \frac{1}{r} + \frac{1}{2}\sqrt{r^2 - 1} - \frac{1}{2}r^2 \text{ arcsin } \frac{-1}{r} \\
&= \sqrt{r^2 - 1} + r^2 \text{ arcsin } \frac{1}{r}
\end{aligned}$$

Um gleich das Nullstellenverfahren anwenden zu können, stellen wir diese Gleichung um und bilden die Ableitung:

$$\begin{aligned}
f(r) &= \sqrt{r^2 - 1} + r^2 \text{ arcsin } \frac{1}{r} - 2 \\
f'(r) &= \frac{1 \cdot 2r}{2\sqrt{r^2 - 1}} + 2r \text{ arcsin } \frac{1}{r} + r^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{r^2}}} \cdot \frac{-1}{r^2} \\
&= \frac{r}{\sqrt{r^2 - 1}} + 2r \text{ arcsin } \frac{1}{r} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{r^2}}}
\end{aligned}$$

Hinweis zur Newton-Iteration: Die Iterationsformel ist

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Folgendes Listing zeigt die (angepaßte) Implementierung in C++:

```c
#include <math.h>
#include <stdio.h>

double f(double x)
{
  return x*x*asin(1/x) + sqrt(x*x - 1) -2;
}

double fstrich(double x)
{
 return (x / (sqrt(x*x -1))) + 2 * x * asin(1/x)
      - (1 / sqrt(1- (1 / (x*x))));
}

int main(int argc, char* argv[])
{
 double x,y,xo, fehler,eps;
 eps=0.0000001;     /* Genauigkeit   */
 xo=1.6;            /* der Startwert */
 x = xo;
 fehler = eps + 1;

  while(fehler > eps)
 {
        y = x -  ( f(x) / fstrich(x) );

        if (y-x<0) { fehler = -(y-x); }
        else       { fehler = y-x;    }

        x=y;
 }
 printf("Loesung: r=%lf.\n",x);
 return 0;
}
```

Nach bereits vier Iterationen ist die Lösung relativ stabil.

```
Bei x=1.600000  dann x+1 = 1.147618
Bei x=1.147618  dann x+1 = 1.165552
Bei x=1.165552  dann x+1 = 1.165644
Bei x=1.165644  dann x+1 = 1.165644
Loesung: r = 1.165644.
```

Wir verwenden MuPAD, um die Lösung zu überprüfen:

```
numeric::int( sqrt( (1.165644)ˆ2 - xˆ2), x=-1..1)
    1.999999219
```

2.3 Lösungmöglichkeit 2

Dies war meine allererste Lösung; zu der Zeit besaß ich noch nicht den BRONSTEIN - hatte allerdings gerade in Analysis die Substitution kennengelernt, die ich dann auch verwenden konnte.

Also, gleiches Problem:

$$2 = \int_{-1}^{1} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$$

zu bestimmen. Dazu substituieren wir

$$x = r \cdot \sin u, \quad dx = r \cdot \cos u, \quad u = \text{arcsin } \frac{x}{r}$$

$$\begin{aligned}
2 &= \int_{-1}^{1} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx \\
&= \int_{-1}^{1} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2(u)}\, r \cos u \, du \\
&= r^2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - \sin^2(u)}\ \cos u \, du \\
&= r^2 \int_{-1}^{1} \cos^2(u)\, du \\
&= \frac{1}{2} r^2 \Big[u + \sin u \cos u \Big]_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{2} r^2 \left[\text{arcsin } \frac{x}{r} + \frac{x}{r} \cos \text{arcsin } \frac{x}{r} \right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{2} r^2 \left(2\text{arcsin } \frac{1}{r} + \frac{2}{r} \cos \text{arcsin } \frac{1}{r} \right) \\
&= r^2 \left(\text{arcsin } \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \cos \text{arcsin } \frac{1}{r} \right) \\
&= r^2 \text{ arcsin } \left(\frac{1}{r} \right) + r \cos \text{arcsin } \left(\frac{1}{r} \right)
\end{aligned}$$

Das formen wir um zu einer Funktion, um auch hier das Newtonschen Iterationsverfahren zur Nullstellen-Suche anzuwenden:

$$f(r) = r^2 \text{ arcsin} \left(\frac{1}{r} \right) + r \cos\ \text{arcsin} \left(\frac{1}{r} \right) - 2$$

Für die Ableitung ergibt sich

$$\begin{aligned}
f'(r) &= \left(\underbrace{r^2}_{u} \underbrace{\text{ arcsin } \left(\frac{1}{r} \right)}_{v} + \underbrace{r}_{u} \underbrace{\cos\ \text{arcsin } \left(\frac{1}{r} \right)}_{v} -2 \right)' \\
&= 2r \text{ arcsin } \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1 \cdot r^2}{\sqrt{1 - \frac{1}{r^2}}} \cdot \frac{-1}{r^2} + r \cdot \sin\ \text{arcsin } \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{r^2}}} \cdot \frac{-1}{r^2} + \cos \text{arcsin} \left(\frac{1}{r} \right) \\
&= 2r\text{arcsin}\frac{1}{r} + \cos \text{arcsin}\frac{1}{r} + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{r^2}}} \cdot \left(-1 - \frac{1}{r} \right)
\end{aligned}$$

Die Funktionen werden in C++ so ausgedrückt:

```
double f(double x)
{
 return x*x*asin(1/x)+x*cos(asin(1/x))-2;
}

double fstrich(double x)
{
 return (1+(1/(x*x)) ) / (sqrt(1-(1/(x*x))));
}
```

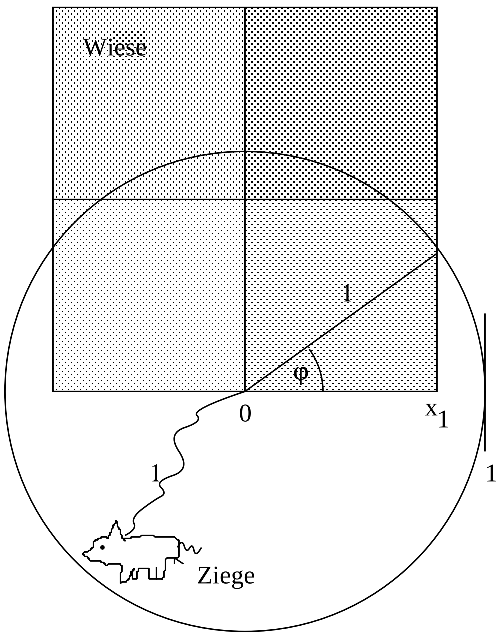
Ausgabe der Zwischenschritte:

```
1 : Bei x=1.600000  x+1=1.051374
2 : Bei x=1.051374  x+1=1.097740
3 : Bei x=1.097740  x+1=1.135317
4 : Bei x=1.135317  x+1=1.154922
5 : Bei x=1.154922  x+1=1.162313
6 : Bei x=1.162313  x+1=1.164661
7 : Bei x=1.164661  x+1=1.165359
8 : Bei x=1.165359  x+1=1.165562
9 : Bei x=1.165562  x+1=1.165620
10: Bei x=1.165620  x+1=1.165637
11: Bei x=1.165637  x+1=1.165642
12: Bei x=1.165642  x+1=1.165644
13: Bei x=1.165644  x+1=1.165644
14: Bei x=1.165644  x+1=1.165644
15: Bei x=1.165644  x+1=1.165644
```

vgl. Variante 1 □

2.4 Lösungmöglichkeit 3

Meine Bemühungen um eine Lösung auf geometrischem Wege wurden belohnt - es kommt das gleiche Ergebnis heraus! Diesmal wird die Länge des Seils auf 1 normiert und die Länge der Wiesenseite variabel gelassen.



Und jetzt kommt der Trick:

$$\cos\varphi_1 = \frac{x_1}{1} \Rightarrow \varphi_1 = \text{acos}\, x_1$$

Mit dieser Identität stellen wir die Gleichung fü die “Unbekannte“ x_1 auf:

$$x_1^2 = \frac{x_1 \cdot \sqrt{r^2 - x_1^2}}{2} + \pi r^2 \frac{90 - \varphi_1}{360} = \frac{x_1 \cdot \sqrt{1 - x_1^2}}{2} + \pi \frac{90 - \varphi_1}{360} = \frac{x_1 \cdot \sqrt{1 - x_1^2}}{2} + \pi \frac{90 - \text{acos}\, x_1}{360}$$

Die Funktion dazu lautet

$$\begin{aligned} f(x_1) &= \frac{x_1 \cdot \sqrt{1 - x_1^2}}{2} + \pi \frac{90 - \text{acos}\, x_1}{360} - x_1^2 \\ &= \frac{1}{2} x_1 \cdot \sqrt{1 - x_1^2} + \frac{1}{4}\pi - \frac{\pi}{360}\, \text{acos}\, x_1 - x_1^2 \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Um das x_1 zu ermitteln, bei dem $f(x_1) = 0$ ist, wenden das Newton-Iterationsverfahren an. Dazu ist die Ableitung $f'(x_1)$ zu bilden:

$$\begin{aligned} f'(x_1) &= \frac{1}{2}\sqrt{1 - x_1^2} - \frac{1}{2} x_1 \cdot \frac{-2x_1}{2\sqrt{1 - x_1^2}} - \frac{\pi}{360} \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{1 - x_1^2}} \right) - 2x_1 \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{1 - x_1^2} + \frac{x_1^2}{2\sqrt{1 - x_1^2}} + \frac{\pi}{360 \cdot \sqrt{1 - x_1^2}} - 2x_1 \end{aligned}$$

Der Quellcode ist aus Variante 1 übernommen, hier seien die beiden Methoden für $f(x)$ und $f'(x)$ genannt. Man beachte, daß *acos* in C++ das Ergebnis in Bogenmaß zurückgibt, es ist also die Konvertierung zu Grad notwendig: $\varphi = \frac{180}{\pi} \cdot x$.

```
double f(double x)
{
   return  0.5 * x * sqrt(1-x*x) + 0.25 * PI
        - (PI / 360.0) * (180 / PI) * acos(x) - x*x;
}

double fstrich(double x)
{
    return 0.5 * sqrt(1-x*x) + (x*x) / (2* sqrt(1-x*x))
        + (PI) / (360 * sqrt(1-x*x)) - 2*x;
}
```

Das Iterationsverfahren verläuft dann so:

```
Bei x=0.900000  dann x+1 = 0.814735
Bei x=0.814735  dann x+1 = 0.879285
Bei x=0.879285  dann x+1 = 0.840815
Bei x=0.840815  dann x+1 = 0.867775
Bei x=0.867775  dann x+1 = 0.850840
Bei x=0.850840  dann x+1 = 0.862277
Bei x=0.862277  dann x+1 = 0.854912
Bei x=0.854912  dann x+1 = 0.859806
Bei x=0.859806  dann x+1 = 0.856621
... (15 Schritte später)
Bei x=0.857897 dann x+1 = 0.857893
Bei x=0.857893 dann x+1 = 0.857896
Bei x=0.857896 dann x+1 = 0.857894
Bei x=0.857894 dann x+1 = 0.857895
Bei x=0.857895 dann x+1 = 0.857895
```

Nun gleichen wir das Ergebnis auf die Seitenlänge 1 an:

$$l_{\text{Seil}} = \frac{100}{0.857895} = 1.165643814$$

Die Überprüfung durch MuPAD liefert die Bestätigung, daß auch diese Variante richtig ist:

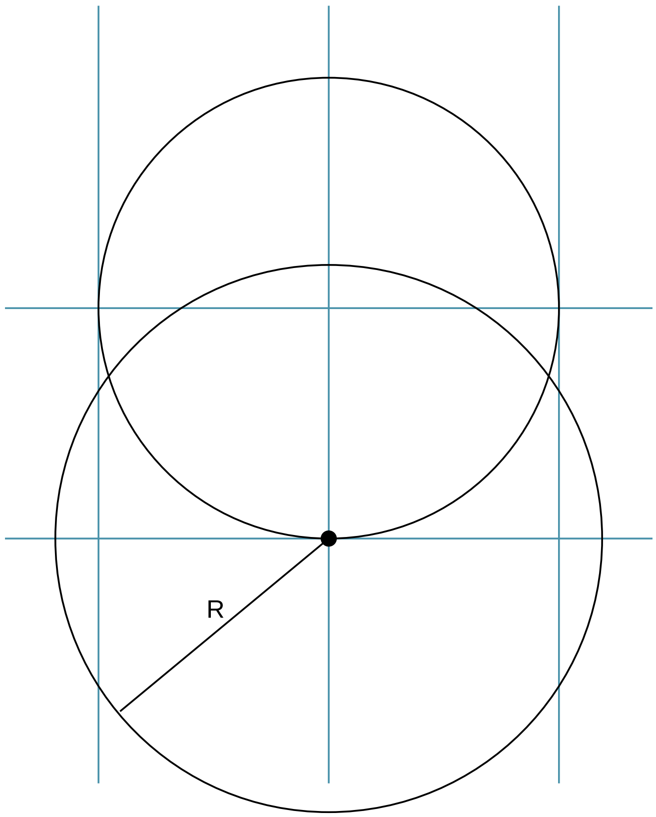
```
numeric::int( sqrt( (1.165643814)^2 - x^2), x=-1..1)

1.999998772
```

$\square$

3 Ziegenproblem Variante 2

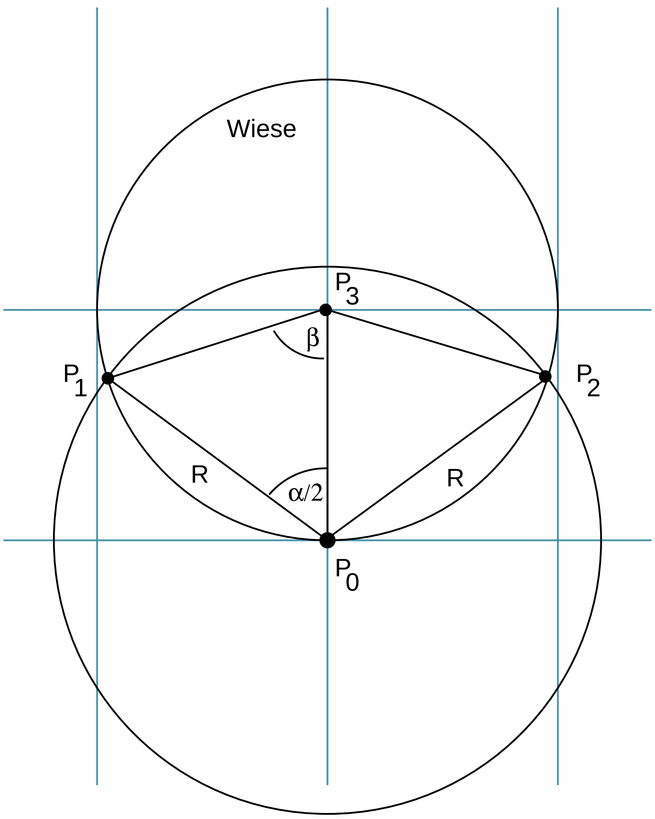
3.1 Aufgabenstellung

Ein Bauer hat eine kreisrunde Wiese mit dem Radius r. Er will seine Ziege am Rand der Wiese so anpflocken, daß diese genau die Hälfte der Wiese abgrasen kann. Wie lang muss das Seil sein?



3.2 Lösungmöglichkeit 1

Nehmen wir an, die Wiese hat den Radius $r = 1$. Der Pflock für die Leine steckt auf dem Rand der Wiese im Punkt P_0. Der Kreis, den die ständig an der Leine der Länge R zerrende Ziege beschreibt, schneidet den Rand der Wiese in zwei Punkten P_1 und P_2.
Sei α der Winkel des Dreiecks $P_1P_0P_2$ im Punkt P_0.



Zuerst betrachten wir das Dreieck $P_1P_0P_3$ und folgern, daß der Winkel in P_1 $\frac{\alpha}{2}$ betragen muß und erhalten

$$\beta = 180° - \alpha \quad \text{bzw.} \quad \beta = \pi - \alpha \tag{1}$$

Nun wollen wir eine Beziehung zwischen R und dem Winkel α herstellen, was uns über den Cosinus-Satz gelingt:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

Auf unser Problem bezogen heißt das

$$\begin{aligned} R^2 &= 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos\beta \\ &= 2 \cdot (1 - \cos\beta) \\ &= 2 \cdot (1 - (180 - \alpha)) \\ &= 2 \cdot (1 + \cos\alpha) \end{aligned}$$

Unter Ausnutzung der Additionstheoreme für Funktionen des doppelten Winkels folgt

$$= 2 \cdot \left(2\cos^2\frac{\alpha}{2}\right) = 4\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

und somit

$$R = 2\cos\frac{\alpha}{2} \tag{2}$$

Es ist nun die Fläche zu beschreiben, die die Ziege abgrasen kann:

$$\begin{aligned} A_{\text{Ziege}} &= \text{Sektor}_{\text{Ziege}} + 2 \cdot \text{Segment}_{\text{Wiese}} \\ &= \text{Sektor}_{\text{Ziege}} + 2 \cdot \text{Sektor}_{\text{Wiese}} - A_{\text{Viereck}} \end{aligned}$$

Wir erinnern uns an die Formel für die Berechnung eines Kreissektors: $A_{\text{Sektor}} = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{\varphi}{2\pi} = r^2 \cdot \frac{\varphi}{2}$

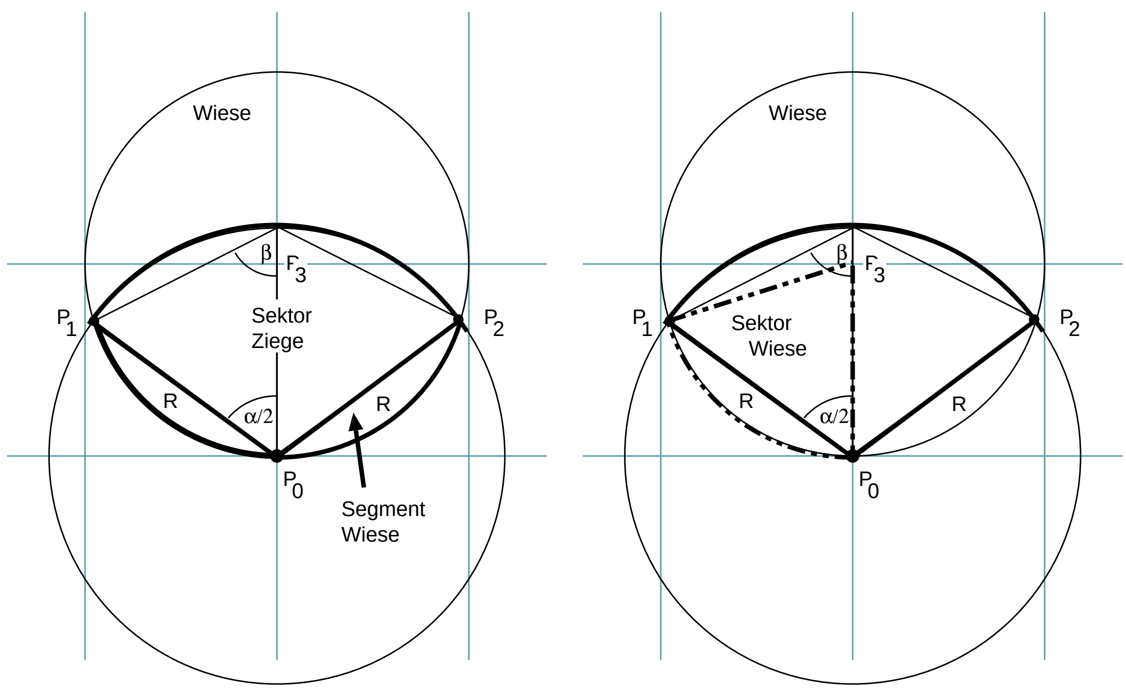
$$= R^2 \cdot \frac{\alpha}{2} + 2 \cdot 1^2 \cdot \frac{\beta}{2} - A_{\text{Viereck}}$$

Es ist noch A_{Viereck} zu bestimmen: Das ist das Doppelte des Flächeninhalts des Dreiecks $\triangle(P_0 P_1 P_2)$, also

$$A_{\text{Viereck}} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot h$$

Im rechtwinkligen Dreieck mit R als Hypothenuse, gilt der Sinussatz $\frac{h}{R} = \sin\frac{\alpha}{2}$. Daraus ergibt sich

$$A_{\text{Viereck}} = R \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$$



$$\begin{aligned} A_{\text{Ziege}} &= R^2\frac{\alpha}{2} + \beta - R\cdot\sin\frac{\alpha}{2} \\ &= R^2\frac{\alpha}{2} + \pi - \alpha - R\cdot\sin\frac{\alpha}{2} \\ &\overset{(2)}{=} \left(2\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 \cdot \frac{\alpha}{2} - \underbrace{2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}_{=\sin\alpha} - \alpha + \pi \\ &= 4\cdot\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin\alpha - \alpha + \pi \\ &= \alpha\cos\alpha - \sin\alpha + \pi \end{aligned}$$

Dies setzen wir mit der halben Fläche der Wiese gleich

$$\alpha \cos \alpha - \sin \alpha + \pi = \frac{\pi}{2}$$

und lösen es nach 0 auf:

$$0 = f(\alpha) = \alpha \cos \alpha - \sin \alpha + \frac{\pi}{2}$$

Um die Nullstelle im Intervall $[0; \pi]$ zu ermitteln, wenden wir das NEWTONsche Näherungsverfahren an.
Wir bilden die Ableitung:

$$f'(\alpha) = \cos \alpha - \alpha \cdot \sin \alpha + \cos \alpha = -\alpha \sin \alpha$$

Das Verfahren ergibt:

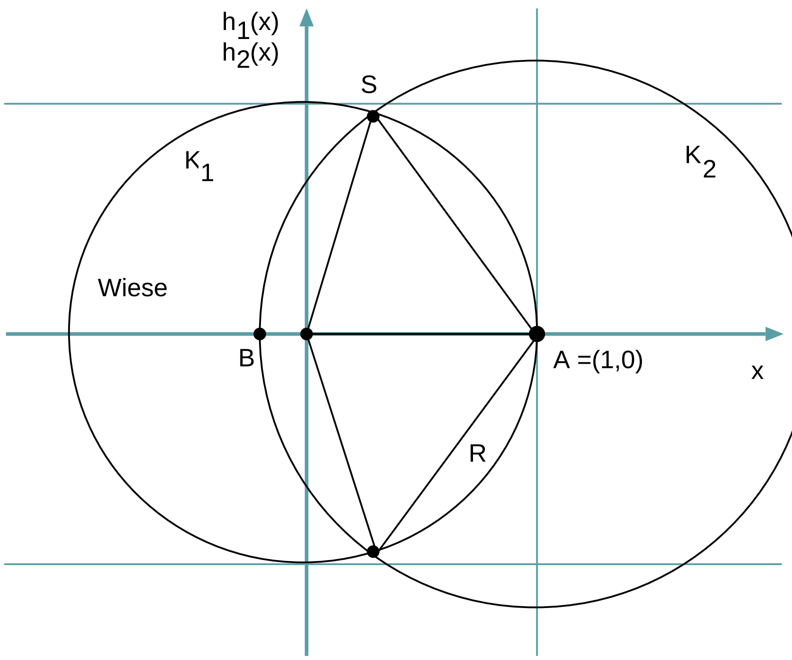
```
Iterationen: 30, Startwert: 1.0

0 : 2.508819845226265    R = 0.6222687222588277
1 : 1.8053796625458864   R = 1.2390014097210473
2 : 1.9070618863351803   R = 1.1576146908647071
3 : 1.9056961558915482   R = 1.1587281253247077
4 : 1.905695992227646    R = 1.1587282587220575
5 : 1.9056959922276435   R = 1.1587282587220595
...
29 : 1.9056959922276435  R = 1.1587282587220595
```

Wir erhalten also als Lösung:

Das Seil der Ziege muss also ≈ 1.15873 mal so lang sein wie der Radius R der Wiese, damit sie genau die Hälfte von ihr abfressen kann. $\square$

3.3 Lösungmöglichkeit 2

Die Lösung soll diesmal auf analytischem Wege ermittelt werden.



Wir setzen in Analogie zum vorigen Teil den Radius der Wiese auf $r = 1$, der Radius des Seils sei R. Die Wiese nennen wir im folgenden K_1, den Kreis der Ziege K_2.

Aus Symmetriegründen wird desweiteren nur die oberen Kreishälften betrachtet, was uns ermöglicht, Funktionen dafür aufzustellen:

$$
\begin{aligned}
h_1(x) &= \sqrt{1^2 - x^2} \\
h_2(x) &= \sqrt{b^2 - (x-1)^2}
\end{aligned}
$$

S ist der Schnittpunkt von $h_1(x)$ und $h_2(x)$ im Intervall $[1 - R; 1]$. Er soll nun errechnet werden. Es gilt

$$S_x = \sqrt{1^2 - x^2} = \sqrt{b^2 - (x-1)^2}$$

Somit folgt

$$a^2 - x^2 = b^2 - x^2 + 2x + 1 \;\Leftrightarrow\; 2x = 2 - b^2 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{2 - b^2}{2} = 1 - \frac{b^2}{2}$$

Es ergibt sich

$$S\left(1 - \frac{b^2}{2} \,|\, \frac{b}{2}\sqrt{4 - b^2}\right)$$

Wir interessieren uns für die durch die Punkte (B, A, S) begrenzte Fläche, die im folgenden A^* heißt.

$$
\begin{aligned}
A^* &= \int_{1-b}^{1-\frac{b^2}{2}} \sqrt{b^2 - (x-1)^2}\, dx \;+\; \int_{1-\frac{b^2}{2}}^{1} \sqrt{1^2 - x^2}\, dx \\
&= \int_{-b}^{\frac{b^2}{2}} \sqrt{b^2 - x^2}\, dx \;+\; \int_{1-\frac{b^2}{2}}^{1} \sqrt{1^2 - x^2}\, dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\frac{x}{2}\sqrt{b^2-x^2}+\frac{b^2}{2}\text{ arcsin }\frac{x}{b}\right]_{-b}^{-\frac{b^2}{2}} + \left[\frac{x}{2}\sqrt{1^2-x^2}+\frac{1}{2}\text{ arcsin }\frac{x}{1}\right]_{1-\frac{b^2}{2}}^{1} \\
&= \left[\left(-\frac{b^2}{4}\sqrt{b^2-\frac{b^4}{4}}+\frac{b^2}{2}\text{ arcsin }\left(-\frac{b}{2}\right)\right)-\left(-\frac{b}{2}\sqrt{b^2-b^2}+\frac{b^2}{2}\text{ arcsin }(-1)\right)\right] \\
&\quad + \left[\left(\frac{1}{2}\sqrt{1^2-1^2}+\frac{1}{2}\text{ arcsin }(1)\right)-\left(\left(\frac{1}{2}-\frac{b^2}{4}\right)\sqrt{1^2-\left(1-\frac{b^2}{2}\right)}+\frac{1}{2}\text{ arcsin }\left(1-\frac{b^2}{2}\right)\right)\right] \\
&= \frac{(1+b^2)\cdot\pi}{4}-\frac{b}{4}\sqrt{4-b^2}-\frac{b^2}{2}\text{ arcsin }\frac{b}{2}-\frac{1}{2}\text{arcsin}\left(\frac{2-b^2}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Diese Fläche setzen wir nun mit $\frac{\pi}{4}$ gleich, also mit der oberen Kreisfläche von K_1. Es ist also

$$
\begin{aligned}
A^* &= \frac{(1+b^2)\cdot\pi}{4}-\frac{b}{4}\sqrt{4-b^2}-\frac{b^2}{2}\text{ arcsin}\frac{b}{2}-\frac{1}{2}\text{ arcsin }\left(\frac{2-b^2}{2}\right) := \frac{\pi}{4} \\
\Rightarrow\ 0 &= \frac{b^2\pi}{4}-\frac{b}{4}\sqrt{4-b^2}-\frac{b^2}{2}\text{ arcsin }\frac{b}{2}-\frac{1}{2}\cdot\text{ arcsin }\left(\frac{2-b^2}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Diese Gleichung ist nicht nach b auflösbar, also wenden wir das NEWTONsche Iterationsverfahren an. Die dazu benötigte Ableitung $(A^*)'$ ermitteln wir wie folgt:

$$
\begin{aligned}
(A^*)' &= \frac{1}{2}b\pi-\frac{1}{4}\sqrt{4-b^2}-\frac{b}{4}\cdot\frac{1\cdot(-2b)}{2\sqrt{4-b^2}}-b\text{ arcsin }\frac{b}{2}-\frac{b^2}{2}\cdot\frac{1\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{b}{2}\right)^2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot(-b)}{\sqrt{1-\left(\frac{2-b^2}{2}\right)^2}} \\
&= \frac{1}{2}b\pi-\frac{1}{4}\sqrt{4-b^2}+\frac{b^2}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{4-b^2}}-b\text{ arcsin }\frac{b}{2}-\frac{b^2}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{b}{2}\right)^2}}+\frac{1}{2}b\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2-b^2}{2}\right)^2}}
\end{aligned}
$$

Anwendung des Newton Iterationsverfahrens liefert:

Iteration	Wert
0	1.1634963638273033
1	1.1587306167758329
2	1.1587281776935254
3	1.1587281776928735
4	1.1587281776928735
	...
29	1.1587281776928735

Wir erhalten die gleiche Lösung wie in der ersten Variante, dass nämlich das Seil der Ziege ungefähr 1.15873 mal so lang sein muss wie der Radius R der Wiese. $\square$