Einstieg für Laien in die Finanzmathematik

Kurse vom 23. Okt. 2017 bis 05. März 2018 im
Bildungsforum Dortelweil e.V. in Bad Vilbel,
am 21. April 2018 dokumentiert von Gerhard Schallenkamp

Die ersten vier Kapitel sind Basiswissen der Schule. Der Text danach entstand aus zwei Kursen über Finanzmathematik für Laien, die im Winter 2017/2018 im Bildungsforum Dortelweil e.V. in Bad Vilbel stattfanden, dank der Geschichten aus dem Leitfaden-Buch *Bernd Luderer, Mathe, Märkte und Millionen* (siehe Literatur L5) und dank der Erklärungen des vorliegenden Lehrtextes, der das benötigte Wissen möglichst einfach bereitstellt. Nur der Abschnitt 7.3 und das Kapitel 9 erfordern Differenzialrechnung und Oberstufen-Stochastik.

Das Äquivalenzprinzip erlaubt, künftige Zahlungen mit gegenwärtigen zu vergleichen, abhängig von Zinsmodellen: von der einfachen Verzinsung ${}^{1}Z$ oder vom Zinseszins ${}^{z}Z$. Modelle spielen in der Finanzmathematik eine große Rolle, ihre Stärken und Schwächen werden untersucht. So ist auch das No-Arbitrage-Prinzip notwendig für jedes Modell, auch wenn Börsianer etwas anderes glauben.

Die erwähnten Modelle können den Finanzmarkt organisieren und bewerten. Modellieren heißt hier nicht, Gleichungen aufzustellen, sondern mit den Produkten ein System auf Prinzipien aufzubauen. Der wirkliche Finanzmarkt ist aber völlig anders als die Modelle.

Inhalt Seite

Finanzmathematik: Zins- und Renditerechnung

Die Zinsrechnung basiert auf der Prozentrechnung und auf dem Prinzip der Proportionalität.

1. Beispiele für das Rechnen mit prozentualen Proportionen

Prozentsatz $p\% = \frac{p}{100}$	**Grundwert** GW = GW · 100%	**Prozentwert** PW = GW · p%	Summe/ Änderungsfaktor GW ·(100 ± p)%
Rabatt oder Rabattsatz (p%)	Alter Preis (GW)	Rabatt, Rabattbetrag oder Ersparnis (RB = GW · p%)	Neuer Preis = GW – RB = GW · (1 – p%)
Steuersatz	Zu versteuernder Betrag	Steuer/Steuerbetrag	
Mehrwert-Steuer-satz (19%)	Netto-Preis (GW)	Mehrwertsteuer(-Betrag) (MWSt = GW · 19%)	Brutto-Preis = GW + MWSt = GW · 1,19
Zins, Zinssatz oder Rendite (p%)	Angelegtes Geld, Eingesetztes Kapital (GW)	Zins, Zinsbetrag oder Gewinn (ZB = GW · p%)	Verzinstes Kapital/Neues Guthaben = GW + ZB = GW · (1 + p%)
Provisionssatz (p%)	(Kauf-)Betrag laut Vertrag (GW)	Provision (PW = GW · p%)	Gesamtkosten des Käufers (= GW + PW)
Steigung/Gefälle (Verkehrsschild, p%)	Waagerechte Distanz (s)	Höhenunterschied h = s · p%	
Anteil	Ganzes	Bruchteil = Ganzes · Anteil	
Relative Häufigkeit, Wahrscheinlichkeit	Gesamtzahl (aller Versuche oder Ergebnisse)	Absolute Häufigkeit	

Anmerkungen:
Für viele Lebensmittel und Bücher ist der MWSt-Satz zurzeit 7%.
Zinssätze sind jährlich, wenn nichts anderes angegeben ist. Im Zweifel schreibt man 6% p.a. (p.a. = per annum = pro Jahr).
Relative Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten liegen immer zwischen 0 und 1.

Ab 7. Schuljahr: In der rechten Spalte heißt $q = 1 + p\% = 1 + \frac{p}{100}$ Änderungsfaktor (z. B. für $p\% = 16\%$ ist $q = 1,16$). Mit ihm kann aus dem kumulierten Wert (z.B. Brutto-Preis) der Grundwert (der Netto-Preis) und die Differenz zum kumulierten Wert (z.B. die MWSt.) berechnet werden. In der Zinsrechnung heißt er auch Aufzinsungsfaktor oder kurz Zinsfaktor und ist die Basis für die Zinseszinsrechnung. Wenn $p > 0$ ist, ist der Änderungsfaktor $q > 1$ und heißt auch Zunahme- oder Wachstumsfaktor. Wenn $p < 0$ ist, ist $q < 1$ und heißt auch Abnahmefaktor.

2. Einfache Zinsrechnung

Für geliehenes Geld oder Kapital ist ein Entgelt zu zahlen, Zinsen genannt, die proportional zum geliehenen Betrag und zur Zeitdauer anfallen.
Zinssätze *ohne* Zeitangaben sind immer jährlich. Im Zweifel schreibt man 6% p.a. (p.a. = per annum = pro Jahr).
Das Wort Zins wird meist im Plural („Zinsen") benutzt und ist mehrdeutig:
Umgangssprachlich bedeutet es den Zinssatz oder den Zinsbetrag, in der Zinsrechnung ist mit Zinsen immer der Betrag gemeint (englisch interest bzw. interestrate).

Prozentsatz $p\% = \frac{p}{100} = i$	**Grundwert** GW	**Prozentwert** $PW = GW \cdot p\%$	Addition/Subtraktion/ Änderungsfaktor
Zinssatz oder Rendite (p%)	Angelegtes Geld, Eingesetztes Kapital (GW = K)	Zinsen, Zinsbetrag oder Gewinn ($ZB = GW \cdot p\%$)	Verzinstes Kapital/Neues Guthaben $= GW + ZB$ $= GW \cdot (1 + p\%)$

Da Zinssätze jährlich sind, berechnet folgende Formel die Jahreszinsen für das Kapital K

(R2.1)	Jahreszinsen (für ein Jahr) $Z_J = K \cdot p\%$

Der Zinssatz errechnet sich aus den Jahreszinsen und dem Kapital $p\% = Z_J/K$.
Das Kapital errechnet sich aus den Jahreszinsen und dem Zinssatz $K = Z_J/p\% = Z_J \cdot 100/p$.

Tageszinsen sind Zinsen für eine bestimmte Anzahl Tage und werden über die Jahreszinsen berechnet. Dabei zählt in der „30/360-Methode" jeder Monat genau 30 Tage, das Jahr besteht aus 360 Zinstagen. (Der 1. Tag zählt nicht, aber der letzte, so dass eine Anlage vom 1. bis 10. eines Monats 9 Tage bedeutet. Der 31. eines Monats zählt nicht, Ultimo eines Monats ist der letzte Tag des Monats.)
Die Tageszinsen für 1 Tag sind $Z_1 = Z_J/360$, für t Tage $Z_t = Z_1 \cdot t = Z_J \cdot t/360$.

(R2.2)	Tageszinsen für t Tage $Z_t = Z_1 \cdot t = Z_J \cdot \frac{t}{360}$

Nur Endergebnisse werden auf 2 Stellen nach dem Komma gerundet, Zwischenergebnisse der Genauigkeit wegen nicht.

Fazit: Tageszinsen für t Tage werden über die Jahreszinsen und 1-Tag-Zinsen Z_1 berechnet, und zwar durch Multiplikation bzw. Division mit den Zahlen t (Anzahl Tage) und 360 (Dreisatz-Methode). Sie sind *proportional* zu der Anzahl Zinstage.
Umgekehrt ermittelt man die Jahreszinsen aus den Tageszinsen und daraus dann ggf. das Kapital oder den Zinssatz.

Jahreszinsen $Z_J = Z_t \cdot \frac{360}{t} = Z_1 \cdot 360$

Als Beispiel die Aufgabe: Wie lange (wie viele Tage) müssen 1000 Euro bei 8% angelegt werden, bis 1050 Euro erreicht sind?
Lösung: Die Jahreszinsen betragen in diesem Fall $1000 \cdot 8\% = 80$ Euro. Für die Tageszinsen von 50 Euro sind also $50/80 = 0{,}625$ Jahre erforderlich oder $0{,}625 \cdot 360 = 225$ Tage, d.h. 7 Monate und 15 Tage.

Anmerkung: Zins-Usancen (= Berechnungsmethoden) auf der Basis von 360 Tagen pro Jahr sind nicht voll konsistent (weil verschiedene Tage anders verzinst werden) und rechnerisch umständlicher als auf der Basis der genauen Anzahl Tage pro Jahr, wenn die genaue Differenz Tage berechnet ist. Details über Zinsusancen siehe Literatur L6, Seite 36-37.

3. Zinseszinsrechnung

Bei der Zinseszinsrechnung werden die Zinsen ab ihrer Gutschrift mit dem gleichen Zinssatz p% zusammen mit dem angesparten Kapital verzinst.

Man rechnet bequem mit dem <u>Zinsfaktor</u> (genauer Aufzinsungsfaktor) $q = 1 + p\% = 1 + \frac{p}{100}$, weil sich das Kapital durch die Zinseszinsen jedes Jahr um den Faktor q vermehrt.
Wie wächst das Kapital K Jahr für Jahr beim Zinssatz von p%?

Nach 1 Jahr: $K_1 = K + Z_J = K + K \cdot p\% = K \cdot (1 + p\%) = K \cdot q$
Nach 2 Jahren: $K_2 = K_1 \cdot (1 + p\%) = K \cdot (1 + p\%)^2 = K \cdot q^2$
Nach n Jahren:

(R3.1)	Kapitalwachstum mit Zinseszins nach n Jahren $K_n = K \cdot (1 + p\%)^n$

Diese Formel gilt nur für natürliche Zahlen n. Ist z.B. n = 2,5, rechnet man erst für 2 Jahre und addiert darauf die Tageszinsen für ½ Jahr. Erst $K_2 = K \cdot (1 + p\%)^2$, dann für K_2 die Tageszinsen $Z_{180} = K_2 \cdot p\% \cdot 180/360$. Dann ist
$K_{2,5} = K_2 + Z_{180} = K \cdot (1 + p\%)^2 \cdot (1 + 0{,}5 \cdot p\%)$.
Fazit: Mit Zinseszins wächst das Kapital <u>nicht</u> proportional zur Zeitdauer, sondern exponentiell bezogen auf die Anzahl Jahre.

Drei Beispiele:
1) Um wie viel Prozent wächst das Kapital K bei einem Zinssatz von 3% und Zinseszins in 6 Jahren?
Lösung: Beim Zinssatz 3% ist $q = 1 + 3\% = 1{,}03$. Aus dem Kapital K wird nach 6 Jahren Zinseszins (bei jährlicher Zinsgutschrift) $K \cdot 1{,}03^6 \approx K \cdot 1{,}194$. Subtrahiert man davon das eingesetzte Kapital K, erhält man die Zinseszinsen in Höhe von $K \cdot 0{,}194$, was einem Zuwachs von 19,4% entspricht.

2) Halbjährliche Zinszahlung: Wie viele Zinseszinsen bringt das Kapital K bei 6% p. a. nach einem Jahr bei halbjährlicher Zinszahlung?
Lösung: Nach dem 1. Halbjahr wird die Hälfte von 6% als Zins gutgeschrieben. Das Guthaben beträgt dann $K \cdot (1 + 3\%) = K \cdot 1{,}03$. Am Jahresende werden wieder 3% davon gutgeschrieben. Das Guthaben beträgt dann $K \cdot 1{,}03^2 = K \cdot 1{,}0609$.
Die Zinseszinsen betragen $K \cdot 0{,}0609$, was 6,09% bei jährlicher Zinszahlung entspräche.

3) Bundesschatzbrief im Jahr 2010
Der Bundesschatzbrief Typ B kumuliert die jährlich anfallenden Zinsen, die dann mitverzinst werden und erst am Ende der Laufzeit gezahlt werden. Er läuft über 7 Jahre, sein Zinssatz wächst von Jahr zu Jahr in dieser Reihenfolge: 0,25%, 0,75%, 1,25%, 2,5%, 3,25%, 3,5% und 3,5%. Wie viele Zinseszinsen erhält der Anleger nach 7 Jahren für 1000 Euro?
Lösung: Mit den entsprechenden Zinsfaktoren lässt sich das Kapitalwachstum berechnen:
$1000 \cdot 1{,}0025 \cdot 1{,}0075 \cdot 1{,}0125 \cdot 1{,}025 \cdot 1{,}0325 \cdot 1{,}035^2 = 1159{,}36$ Euro.
Der Anleger erhält nach 7 Jahren insgesamt 159,36 Euro Zinsen.

Die Finanzmathematik benutzt zwei verschiedene Wachstumsmodelle das **einfache Wachstum** laut linearer Formel (R2.2), graphisch darstellbar durch eine Gerade, und das **exponentielle Wachstum** laut Formel (R3.1), auch als stetige Funktion darstellbar. Dazu ist ein Grundwissen über Potenzen und Logarithmen notwendig.

4. Über Potenzen und Logarithmen

Für natürliche Zahlen wird die Multiplikation $m \cdot n$ erklärt als n-fache Addition von m, zum Beispiel $m \cdot 4 = m + m + m + m$.
Analog lassen sich Potenzen mit natürlichem Exponenten p definieren:
b^p ist das p-fache Produkt von b.
Mit dieser Definition können wir die Regeln für Potenzen mit natürlichen Exponenten p, q herleiten:

(P1) $\mathbf{a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p}$
(P2) $\mathbf{b^p \cdot b^q = b^{p+q}}$
(P3) $\mathbf{(b^p)^q = b^{p \cdot q}}$
Beweis: (P1): Auf beiden Seiten werden a und b p-mal multipliziert. Das Kommutativgesetz der Multiplikation wird ausgenutzt.
(P2): Links wird b erst p-mal und dann q-mal multipliziert, d.h. insgesamt (p + q) mal.
(P3): Links wird das das p-fache Produkt von b q-mal miteinander multipliziert, d.h. b wird insgesamt p mal q oft multipliziert.

Mit diesen Regeln lässt sich der Definitionsbereich erweitern.
Für $b \neq 0$, $p = 1$ und $q = 0$ folgt aus (P2): $b^1 \cdot b^0 = b^{1+0} \Rightarrow b \cdot b^0 = b$, d.h.
(P4) $\mathbf{b^0 = 1}$ $(b \neq 0)$
Für $b \neq 0$, $q = -p$ folgt aus (P2): $b^p \cdot b^{-p} = b^0 = 1$
(P5) $\mathbf{b^{-p} = 1/b^p}$ $(b \neq 0)$
Damit sind die Potenzen für alle ganzzahligen Exponenten definiert und die Regeln (P1) bis (P3) gelten auch für negative Exponenten.

Da die Operation des Potenzierens weder assoziativ noch kommutativ ist, finden wir für die Lösung der Gleichungen
(G1) $c = x^p$ und
(G2) $c = b^x$
verschiedene Umkehroperationen, um x zu bestimmen.
Um fehlende Lösungen und Mehrdeutigkeiten zu vermeiden, beschränken wir uns auf $c > 0$, $b > 1$, $p \neq 0$, in (G1) auch auf $x > 0$.

Die Lösung von (G1) heißt *p-te Wurzel*, als Symbol $\sqrt[p]{\ }$. Wegen Regel (P3) gilt:
(L1) $\mathbf{x = \sqrt[p]{c} = c^{1/p}} = (x^p)^{1/p}$.
Damit haben wir Potenzen mit rationalem Exponenten. Erstaunlich ist, dass diese Umkehroperation keine neue Operation ist, sondern nur eine Erweiterung der bestehenden Operation des Potenzierens auf rationale Exponenten.
Da reelle Zahlen sich durch rationale Zahlen beliebig annähern lassen, können Potenzen mit reellen Exponenten über Grenzwerte definiert werden.

Die Lösung von (G2) nennen wir *Logarithmus* zur Basis b, als Symbol $\log_b$:
(L2) $\mathbf{x = \log_b c \Leftrightarrow c = b^x}$ $(b > 1, c > 0)$, $(\Rightarrow \log_b 1 = 0, \log_b b = 1)$
Beachte: $\log_b c$ bezeichnet eine auf c angewandte Funktion, keine Multiplikation!
Aus (P2) folgt:
(L3) $\mathbf{\log_b (c \cdot d) = \log_b c + \log_b d}$ $(b > 1, c > 0, d > 0)$
Beweis: Sei in (P2) $c = b^p$, $d = b^q$ und $c \cdot d = b^{p+q}$. Anwendung von (L2) ergibt:
$p = \log_b c$, $q = \log_b d$, $p + q = \log_b (c \cdot d)$.

Aus (P3) folgt:
(L4) $\mathbf{\log_b (c^q) = q \log_b c}$ $(b > 1, c > 0)$
Beweis: Sei in (P3) $c = b^p$, $d = c^q = b^{p \cdot q}$. Anwendung von (L2) ergibt:
$p = \log_b c$, $p \cdot q = \log_b d$. Daraus folgt (L4).
Spezialfall von (L4) für $q = -1$ oder (L3) für $d = 1/c$:
(L5) $\mathbf{\log_b (c^{-1}) = \log_b (1/c) = - \log_b c}$ $(b > 1, c > 0)$

Somit folgt aus (L3):

(L6) $\mathbf{\log_b (c/d) = \log_b c - \log_b d}$ $(b > 1, c > 0, d > 0)$

In der Praxis werden die Logarithmen zur Basis 2, 10 und der Eulerschen Zahl e = 2,718... verwendet.

Definitionen: $lb = \log_2$, $\mathbf{lg = \log_{10}, ln = \log_e}$.

Aus der Definition der Umkehrfunktion folgt:

(L7) $c = 10^{\lg c} = \lg (10^c)$

(L8) $c = e^{\ln c} = \ln (e^c)$

Die Konstante e hat sich als praktisch erwiesen, weil die Funktion $f(x) = e^x$ identisch ist mit ihrer Ableitung und $f(0) = 1$.

Jede Exponentialfunktion $f(x) = b^x$ $(b > 1)$ lässt sich mit einer anderen Basis $a > 1$ darstellen. Aus (P3) und (L8) folgt z.B. für a = e:

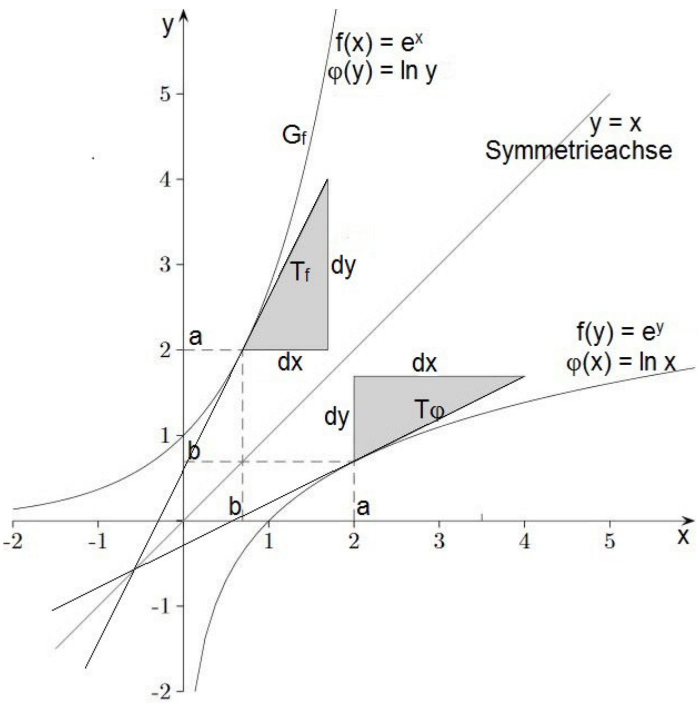
(L9) $\mathbf{b^x = (e^{\ln b})^x = e^{x \cdot \ln b}}$ $(b > 1)$

Das zeigt, wie ähnlich die Graphen der Funktionen des Typs $f(x) = b^x$ $(b > 1)$ einander sind. Jedes Stück Graph von f(x) ist einem anderen Stück ähnlich. Ähnlich heißt: Durch Dehnung oder Stauchung der x-Achse und/oder der y-Achse werden beide Stücke deckungsgleich. Das Wachstum oder Gefälle der Funktion $y = f(x) = b^x$ $(b \neq 1)$ ist darstellbar als Steigung einer Sekante durch die Punkte (x,f(x)) und (x+h,f(x+h)). Sie beträgt $\Delta y/\Delta x = (b^{x+h}-b^x)/h = b^x \cdot (b^h-1)/h$. Für festes $\Delta x = h \neq 0$ ist der Faktor $(b^h-1)/h$ eine Konstante. Das heißt:

(L10) Die Steigung von $f(x) = b^x$ $(b \neq 1)$ ist an allen x proportional zu $y = b^x$.

4.1 Die Umkehrfunktion

Wenn x und y ihre Rollen tauschen



Der Graph G_f einer Funktion (U1) $y = f(x)$ als Menge der Punktepaare $G_f = \{(x,y)| y=f(x)\}$ erlaubt uns, für ein vorgegebenes x den Funktionswert y abzulesen. Analog können wir ein y vorgeben und das zugehörige x ablesen, vorausgesetzt, y ist überhaupt ein Funktionswert und x ist eindeutig. Damit realisiert der Graph G_f von f(x) auch die **Umkehrfunktion**

(U2) $x = \varphi(y) = f^{-1}(y)$.

$G_f = \{(x,y)| x=\varphi(y)\}$. x und y tauschen ihre Rollen als Argument und Funktionswert. (Das ist der Fall, wenn die Funktion streng monoton und stetig ist.)

Der Weg von f zur Formel von φ mag fremd sein, der Graph von φ(x) gelingt leicht, indem in (U2) x und y vertauscht werden: $y = \varphi(x)$, was graphisch eine Spiegelung an der Geraden y = x bedeutet.

Der Graph veranschaulicht eine Funktion in der ebenen Geometrie, wo wir in der Schule Sekanten und Tangenten mit Kreisen verbunden haben und das jetzt mit den Funktionsgraphen tun wollen, auch wenn das zum Kernthema der Differenzialrechnung gehört.

Def. (D1) Bzgl. einer Exponentialfunktion $f(x) = q^x$ $(q > 0)$ heißt eine Gerade $t(x) = m \cdot x+c$ Tangente, wenn $f(x) \geq t(x)$ für alle x und es eine Stelle a gibt mit $f(a) = t(a)$.

Wegen Satz (L10) ist das kein Problem, wenn f(x) an der Stelle a die Steigung m der Tangente hat. (Für Funktionen mit Wendepunkten ist diese Definition unbrauchbar.) Gemäß (L10) suchen wir nun die Zahl e der Funktion e^x, deren Steigung an der Stelle a gleich e^a ist. Auf diese Zahl war Jakob Bernoulli (1655-1705) bei der Zinseszinsrechnung gestoßen; sie wird hier auf seinem Weg berechnet.

Bei der Spiegelung an der Geraden y = x wird die Tangente $t_f(x)$ y = m·x+c von f(x) am Punkt (b|a=f(b)) auf die Tangente t_φ von φ(x) am Punkt (a|b= φ(a)) gespiegelt (s. Bild oben). t_φ ist daher die Umkehrfunktion von t_f und einfach zu berechnen, indem wir zuerst die Gleichung t_f nach x auflösen x = (y – c)/m und dann x und y vertauschen. Die Steigung der Tangente t_φ hat also den Wert 1/m, und zwar an der Stelle a. Für die Funktion e^x ist m = a = e^b, also ist die Steigung von t_φ und von φ(x) an der Stelle a gleich 1/a. Folgerung:

(L11) An der Stelle x ist die Steigung von e^x gleich e^x, die von ln x gleich 1/x.

Analog Def. (D1) gilt für jede Tangente der Umkehrfunktion φ(x) ≤ t(x) wegen q >1 und m >0. Für die um eine Einheit nach links verschobene Funktion

$\varphi(x) = \ln(1+x)$

und ihre Tangente t_a durch den Punkt (a|φ(a)) gilt wegen φ(0) = 0 ≤ $t_a(0)$ für alle a

$t_a(x) = x/(1+a) + c$, also c ≥ 0, insbes. $t_0(0) = 0$ und $t_0(x) = x$. Daraus folgt

$t_a(a) = \varphi(a) \le t_0(a) = a$,

$a/(1+a) \le \ln(1+a) \le a$.

Wir ersetzen a durch 1/n (n∈ℕ), multiplizieren alle Terme mit n und erhalten:

$$1 - \frac{1}{n+1} \le n \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le 1.$$

Je größer n, desto enger liegt der ln-Wert bei 1 und folglich das ln-Argument bei e, d. h.

(L12) $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718\ldots$

Es gibt bessere Berechnungsmethoden. Jakob Bernoulli war der erste, der die Zahl e mit dieser Methode entdeckt hat, und zwar über die stetige Verzinsung.

4.2 Stetige Verzinsung

Sei i der Zinssatz (engl. interest rate) pro Jahr (bei 3% ist i = 0,03) und K_0 das eingesetzte Kapital.
Dann ergibt am Ende des Jahres das Kapital $K_1 = K_0\,(1 + i)$. Wächst dieses Kapital mit dem gleichen Zinssatz weiter, haben wir nach 2 Jahren $K_2 = K_1\,(1 + i) = K_0\,(1 + i)^2$, nach t Jahren folglich $K_t = K_0\,(1 + i)^t$.
Halbiert sich die Zinsperiode bei gleichem Jahreszins, dann haben wir:

$$K_1 = K_0\left(1+\frac{i}{2}\right)^2 = K_0\left(1+i+\frac{i^2}{4}\right) > K_0\,(1+i).$$

Das Ergebnis ist höher, weil die nach einem halben Jahr angefallenen Zinsen sich im 2. Halbjahr zusätzlich verzinsen. Ist n die Anzahl der unterjährigen Zinsperioden, so folgt:

$$K_1 = K_0\cdot\left(1+\frac{i}{n}\right)^n.$$

Wird n immer größer und die Zinsperiode immer kürzer, spricht man im Grenzfall $n\to\infty$ von stetiger oder kontinuierlicher Verzinsung oder besser „Augenblicksverzinsung mit Zinssatz i“, denn die Renditefunktion $f(t) = (1 + i)^t$ ist ja auch für reelle t stetig.
Im Grenzwert liefert die Substitution k = n/i:

$$K_1 = K_0\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i}{n}\right)^n = K_0\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n/i}\right)^n = K_0\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n/i}\right)^{n/i}\right)^i = K_0\cdot\left(\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right)^i = K_0\cdot e^i.$$

Nach t Jahren ergibt sich dann das Endkapital K_t mit: $K_t = K_0\cdot e^{i\,t}$ (t > 0).

4.2 Durchschnittliche und logarithmierte Rendite

Im Kap. 3 Beispiel 3 wurde der 7jährige Bundesschatzbrief Typ B mit jährlich wachsenden Zinseszinsen in der Reihenfolge: 0,25%, 0,75%, 1,25%, 2,5%, 3,25%, 3,5% und 3,5% vorgestellt. Aus dem Anfangskapital $K_0 = 1000$ wird dann nach 7 Jahren K_7 mit folgender Rechnung: $1000 \cdot 1{,}0025 \cdot 1{,}0075 \cdot 1{,}0125 \cdot 1{,}025 \cdot 1{,}0325 \cdot 1{,}035^2 = 1159{,}36$ Euro.

Die Frage lautet nun: Wie hoch ist durchschnittliche jährliche Rendite? Dazu müssen wir laut Regel (R3.1) die Gleichung $K_0\cdot(1+p\%)^7 = K_7$ lösen, also $(1+p\%)^7 = 1{,}159{,}36$. Die 7. Wurzel ergibt 1+p% = 1,021, d.h. p% = 2,1% als jährliche Rendite. Dieser Wert macht den

Bundesschatzbrief mit anderen Kapitalanlagen vergleichbar. Der Mathematiker sagt, 2,1% ist das geometrische Mittel von 7 Zinsfaktoren.
Allgemein ist definiert:

$$\bar{x}_{\mathrm{geom}} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}$$

Definition: Das **geometrische Mittel** von n positiven Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ist die n-te Wurzel des Produkts der n Zahlen. Siehe L8.
Der Logarithmus macht daraus ein **arithmetisches Mittel**, denn es gilt, siehe rechts:

$$\log_a \bar{x}_{\mathrm{geom}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log_a x_i$$

Für den Nutzen der **logarithmierten Rendite** ŕ = ln(1+p%) spricht, dass ihre Addition sinnvoll ist und wieder eine logarithmierte Rendite ergibt. Mit Prozentzahlen geht das nicht. Beispiel: Sei jährlich $K_0 \cdot e^a = K_1$, $K_1 \cdot e^b = K_2$ und $K_2 \cdot e^c = K_3$, dann ist $K_0 \cdot e^{a+b+c} = K_3$. a+b+c ist die logarithmierte Rendite von K_0 auf K_3 über 3 Jahre. Verfolgt man die log. Renditen (zu gleichen Intervallen, z.B. Wochen) über längere Zeiträume, lassen sich Mittelwerte bilden.

p%	1+p%	ŕ
-9,52%	0,9048	-0,10
-7,69%	0,9231	-0,08
-5,82%	0,9418	-0,06
-3,92%	0,9608	-0,04
-1,98%	0,9802	-0,02
0,00%	1,0000	0,00
2,02%	1,0202	0,02
4,08%	1,0408	0,04
6,18%	1,0618	0,06
8,33%	1,0833	0,08
10,52%	1,1052	0,10

Die Tabelle rechts zeigt einige Vergleichswerte für logarithmierte Renditen von -0,1 bis +0,1. Das Umrechnen der einfachen Renditen in die Logarithmen mag schwierig sein, aber wenn die Bildung von Mittelwerten wichtig ist, ist es sinnvoll. Damit lautet Regel (R3.1)

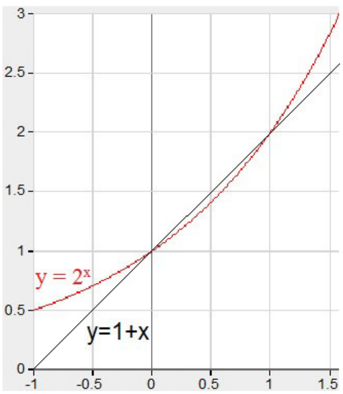
(R4.1) $K_n = K \cdot e^{ŕ \cdot n}$ ŕ = ln(1+p%) oder
$\ln K_n = \ln K + ŕ \cdot n$.

Was passiert, wenn sich in dieser Regel die Zeit n nicht auf ganze Zahlen beschränkt, sondern jede reelle Zahl annehmen kann? Die Antwort folgt im nächsten Kapitel.

5. Das Äquivalenzprinzip der Finanzmathematik

„1 Euro heute sind mehr als 1 Euro morgen." Damit ist hier nicht die Inflation gemeint, sondern die Verzinsung. Man sagt, bei einem Zinssatz von 3% sind 1 € heute äquivalent zu 1,03 € in einem Jahr. Abhängig vom Zinsmodell sind auf diese Weise Zahlungen oder Kapitalbeträge zu verschiedenen Zeiten vergleichbar, und damit sind auch Zahlungsreihen eines Geschäftes über längere Zeit vergleichbar mit ihrem Wert zu einem Stichtag. Solche Vergleiche setzen immer die Wahl eines Wachstumsmodells voraus.
Ein Anfangskapital (sogenannter **Barwert**) heißt **äquivalent** (als Zeichen ~) zum Endkapital (sog. **Endwert**), wenn das Wachstumsmodell das Endkapital aus dem Anfangskapital erzeugt.

(R5.1) Sei K_t das Kapital zur Zeit t und $i \geq 0$ der Zinssatz pro Zeiteinheit (engl. interest rate).
Einfache Verzinsung ^1Z bedeutet $K_t = K_0 \cdot (1 + i \cdot t)$ $(t \geq 0)$ und
$K_t = K_0 : (1 - i \cdot t)$ $(t < 0)$,
Zinseszins-Modell ^zZ $K_t = K_0 \cdot (1 + i)^t$ (Zeit t als reelle Zahl).



Auf diesen Modellen basieren im Kreditwesen **Rendite** und **Effektivzinssatz**, in der Investitionsrechnung der **interne Zinsfuß**. Jede Gleichung besteht aus vier Variablen und kann dazu benutzt werden, eine Variable aus den drei anderen zu berechnen. Beide Modelle verlangen die **Konstanz des Zinssatzes i** im Zeitraum und stimmen nur für t = 0 und ±1 überein. Die Funktionsgraphen links zeigen den geringen Unterschied der Funktionen $y = 2^x$ und $y = 1+x$ (entspr. dem Zinssatz 100%) im Intervall [0,1].

Ist im Modell ^1Z das Anfangskapital der fixe Grundwert für die Verzinsung, wird die lineare Formel zum Rückwärtsrechnen ungeeignet. Das einfach zu rechnende Modell ^1Z, das in der Regel nur für die Zeit $|t| \leq$ Zinsperiode benutzt wird, hat

Mängel, weil aus der Äquivalenz von K_0 zu $K_{½}$ und K_1 nicht exakt die Äquivalenz von $K_{½}$ und K_1 folgt (wegen $K_0 \neq K_{½}$ als Grundwerte).
Die exponentielle ${}^zZ$-Formel, wo das Kapital stets proportional zu K(t) wächst, garantiert die für die Äquivalenz notwendige

Transitivität in ${}^zZ$ (i ist fix)	$K(t_1) \sim K(t_2)$ und $K(t_2) \sim K(t_3) \Rightarrow K(t_1) \sim K(t_3)$,

ist aber ohne Computer nur für ganze Zahlen t einfach zu rechnen. Nicht die Geldwerte allein sind äquivalent, sondern die Wertepaare (K,t); alles hängt von der Zeit ab. Die Formeln eignen sich für verschiedene Zinsgeschäfte: Kapitalanlagen, Darlehen, Investitionen. In der Regel bestehen sie aus mehr als einer Ein- und Rückzahlung (K_0 und K_t), sondern aus einer **Zahlungsfolge** $K_0, K_1, \dots K_n$ zu den Zeiten $t_0=0, t_1, \dots t_n=T$, kurz (K_k,t_k) bezeichnet $(0 \le k \le n)$.

5.1 Äquivalenz von Zahlungsströmen

Da Barwerte (t=0) oder Endwerte (t=T) addiert und verglichen werden können, führen die obigen Formeln auch zum Vergleich von Zahlungsfolgen (C_k,t_k), vorausgesetzt der Zinssatz i ist für alle Teile des Geschäfts (von t= 0 bis T) konstant!

Definition der Funktion ${}^zZ(i,t)$	${}^zZ(i,t) = (1+i)^t$	t in Einheiten der Zinsperiode
(R5.2) Barwert-Äquivalenz einzeln	$K_0 = K_t \cdot (1+i)^{-t} = K_t \cdot {}^zZ(i,-t)$	$t \ge 0$
${}^zZ$-Barwert der Folge (C_k,t_k)	$K_0 = \Sigma_k C_k \cdot {}^zZ(i,-t_k)$	$t_k \ge 0$
${}^zZ$-Endwert der Folge (C_k,t_k)	$K_T = \Sigma_k C_k \cdot {}^zZ(i,T-t_k)$	Endezeit $T \ge t_k$.
${}^1Z$-Barwert der Folge (C_k,t_k)	$K_0 = \Sigma_k C_k:(1+i \cdot t_k)$	$t_k \ge 0$
${}^1Z$-Endwert der Folge (C_k,t_k)	$K_T = \Sigma_k C_k \cdot (1+i \cdot (T-t_k))$	Endezeit $T \ge t_k$

Σ_k bedeutet Addition aller indizierten Elemente. Ein Wechsel des Bewertungsstichtages bedeutet eine Verschiebung aller Zeitpunkte um s.

Wegen $(1+i)^{-t+s} = (1+i)^{-t} \cdot (1+i)^s = c \cdot (1+i)^{-t}$ bedeutet das in (R5.2 ${}^zZ$) nur die Multiplikation mit einer Konstanten (K_0 wird mit $(1+i)^s$ multipliziert) und daher folgt aus (R5.1 ${}^zZ$) mit gleichem Zinssatz die **Äquivalenz zu jedem anderen Stichtag**, was auch die Stärke des ${}^zZ$-Modells zeigt. Um den Endwert bekommen, addieren wir zu allen Zeiten in (R5.2 ${}^zZ$) die Dauer des Geschäftes; alle Exponenten sind dann nicht negativ und bedeuten jeweils die Zeit zwischen Zahlung und Endetermin.

Das ${}^1Z$-Modell hat Mängel. Verändert sich Endwertzeit T um s, so haben wir
$K_T = K_0 \cdot (1+i \cdot T) = \Sigma_k C_k \cdot (1+i \cdot (T-t_k))$
$K_{T+s} = K_0 \cdot (1+i \cdot (T+s)) = \Sigma_k C_k \cdot (1+i \cdot (T+s-t_k))$.
Die Differenz führt zu $K_{T+s} - K_T = K_0 \cdot i \cdot s = \Sigma_k C_k \cdot i \cdot s$ und wegen i>0 zu $K_0 = \Sigma_k C_k$. Damit ist aber doch kein Zinsgeschäft vorhanden. Der ${}^1Z$-Zinssatz hängt von der Zeit ab, weil die verzinslichen Grundwerte fixiert sind. Das ${}^1Z$-Modell ist dennoch brauchbar, weil es einfach zu rechnen ist und innerhalb der Zinsperiode gute Nährungswerte liefert.

5.2 Höhere Rendite dank Vorschusszinsen

Eine Zinszahlung am Ende der Periode heißt **nachschüssig**, am Anfang **vorschüssig**. Weil der Investor im vorschüssigen Fall auch die Vorschusszinsen $K \cdot i_v$ verzinst (i_v < 100%), steigt seine Rendite, der i_e genannte Effektivzinssatz. Um i_e zu berechnen, vergleicht er die Endwerte $K \cdot (1+i_e) = K + K \cdot i_v \cdot (1+i_e)$. Vereinfacht lautet die Gleichung $i_e = i_v \cdot (1+i_e)$ und folglich $i_e = (i_v^{-1}-1)^{-1}$. Bei reflexiv gewonnenen Ergebnissen fragt man natürlich, was sie bedeuten. Angenommen, die Rendite des Marktes sei $r < i_e$; dann wäre $K \cdot (1+r) < K + K \cdot i_v \cdot (1+r)$ und die Anlage mit dem Vorschusszins besser. Ist aber $r > i_e$, dann ist Anlage mit dem Vorschusszins schlechter. Im Fall $r = i_e$ sind beide Investitionen gleichwertig. Fazit: Der Effektivzinssatz macht verschiedene Investitionen renditegleich.

Man kann auch so argumentieren: Der Investor investiert nicht K, sondern $K - K \cdot i_v$ und erhält am Ende K zurück, also ist die Rendite klar mit der Gleichung $(K - K \cdot i_v) \cdot (1+i_e) = K$. Hier leuchtet sofort $i_v < 1$ ein. Interessant noch der

(R5.3) Effektivzinsfaktor für Vorschusszinsen $q_v = i_e : i_v = (1-i_v)^{-1} > 1$ $(0<i_v<1)$.

5.3 Effektivzinssatz laut gesetzlicher Preisangabenverordnung (PAngV)

(Barwert-)Formel zur **Berechnung des Effektivzinssatzes** X laut Anlage der PAngV https://www.gesetze-im-internet.de/pangv/anlage.html.

C_k sind Zahlungen des Kreditgebers und D_l die des Darlehensnehmers zu den Zeitpunkten t_k und s_l. Zeiteinheit ist die Zinsperiode des Zinsssatzes X. Die Summen enthalten sämtliche Zahlungen. Die Gleichung ist im allgemeinen nicht formelmäßig nach X auflösbar, ihre Lösung erfordert komplexe numerische Verfahren.

$$\sum_{k=1}^{m} C_k(1+X)^{-t_k} = \sum_{l=1}^{m'} D_l(1+X)^{-s_l}$$

5.4 Unterschiedliche Zinsperioden

Die normale Zinsperiode, also die Periode, auf die sich der Zinssatz bezieht, dauert ein Jahr. Ist die Periode $u \neq 1$ (für 1 Monat ist $u = 1/12$), so gilt für (^{1}Z) $i_u = u \cdot i_1$, für (^{z}Z) gilt

(R5.4) äquivalenter Zinssatz i_u der Zinsperiode $u \neq 1$ (^{z}Z) $1 + i_u = (1 + i_1)^u$.

6. Vergleich von monatlicher und jährlicher Rate im Modell ^{1}Z

Eine Rate (Zahlung) r_n, die am Monatsultimo gezahlt wird, heißt **nachschüssig**; die am Monatsanfang gezahlte heißt **vorschüssig** r_v. Unterjährig gelte das lineare Wachstum. Eine Rate r liefert ab dem Zeitpunkt der Zahlung $z = r \cdot i/12$ Zinsen pro Monat, d. h. bis zum Jahresende ergibt die erste vorschüssige Rate $12 \cdot z$ Zinsen, die zweite Rate r_v und die erste nachschüssige Rate $11 \cdot z$ Zinsen Die nachfolgenden Raten ergeben $10 \cdot z$, $9 \cdot z$, … $1 \cdot z$ Zinsen, insgesamt die Zinssumme $\Sigma_k\, k \cdot z = (11 + 10 + \ldots + 1) \cdot z$, nur im vorschüssigen Fall $+12 \cdot z$. Summen von Zahlenfolgen $a_1 + \ldots + a_n$ heißen **Reihen**. Ist die Differenz der Folgenglieder ($a_{i+1} - a_i = d$) konstant, heißen sie **arithmetische Reihen** und sind einfach zu berechnen wegen $a_1+a_n = (a_1+d)+(a_n-d) = a_2+a_{n-1} = a_3+a_{n-2} = \ldots = a_n+a_1$.

(R6.1) Arithmetische Reihe $a_1 + \ldots + a_n = ½ \cdot n \cdot (a_1+a_n)$

Im Fall der nachschüssigen Raten haben wir $a_1 = 11$, $a_{11} = 1$ und $n = 11$, d. h. $\Sigma_k\, k \cdot z = ½ \cdot 11 \cdot (11+1) \cdot z = ½ \cdot 11 \cdot 12 \cdot (r_n \cdot i/12) = 5{,}5 \cdot r_n \cdot i$, im Fall der vorschüssigen Raten haben wir $a_1 = 12$, $a_{12} = 1$ und $n = 12$, d. h. $\Sigma_k\, k \cdot z = ½ \cdot 12 \cdot (12+1) \cdot z = ½ \cdot 12 \cdot 13 \cdot (r_v \cdot i/12) = 6{,}5 \cdot r_v \cdot i$; folglich:

(R6.2) nachschüssige Jahresersatzrate R_n (i = Zinssatz p. a.)
für nachschüssige Raten $R_n = r_n \cdot (12 + 5{,}5 \cdot i)$
für vorschüssige Raten $R_n = r_v \cdot (12 + 6{,}5 \cdot i)$

R_n ist zur Zahlungsreihe der monatlichen Raten r_n bzw. r_v äquivalent. Für eine vorschüssige Jahresersatzrate gilt $R_v = R_n/(1+i)$ ($\approx R_n \cdot (1-i)$, wenn $i \approx 0$).

7. Vergleich von jährlichen Zahlungen mit einer Einmalzahlung im Modell ^{z}Z

Mit Zinseszins wachsen die jährlich gleichbleibende Zahlungen z mit dem Zinssatz i von 0 bis zum Jahr n wie folgt: $z \cdot (1+i)^n$, $z \cdot (1+i)^{n-1}$, $z \cdot (1+i)^{n-2}$, … $z \cdot (1+i)$, z. Als Summe ergibt das eine Reihe, aus der sich z ausklammern lässt: $z \cdot (1+i)^n + z \cdot (1+i)^{n-1} + \ldots\, z \cdot (1+i) + z = z \cdot S_n$. Wenn der Quotient der Folgenglieder ($a_{i+1} / a_i = q$, hier ist $q = 1+i$) konstant ist, heißt sie **geometrische** Reihe und ist wegen $q \cdot S_n - S_n = q^{n+1} - 1 = (q-1) \cdot S_n$ mit einer Formel berechenbar:

(R7.1) Geometrische Reihe $S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = (q^{n+1}-1)/(q-1) = ((1+i)^{n+1}-1)/i$

7.1 Kursformel einer Anleihe

Durch Zinseszins wächst ein Kapital K nach n Jahren auf $K \cdot (1+i)^n$. Eine Anleihe mit gleicher Laufzeit zahle nun jährlich für ihren Nominalwert (= 100) $p = 100 \cdot p\%$ Zinsen. Mit Zinseszins ergibt das $p \cdot (1+i)^{n-1} + p \cdot (1+i)^{n-2} + \ldots + p = p \cdot ((1+i)^n-1)/i$. Wird die Anleihe nicht zum Kurs 100 gekauft, sondern zum Kurs K_0, aber mit Kurs 100 zurückgezahlt, gilt für die Rendite:

Anleihe, nominal 100, Kurs K_0, Laufzeit n Jahre, nachschüss. Jahreszinsen p = 100·p%
(R7.2) Gleichung für Rendite i $\quad K_0\cdot(1+i)^n = 100 + p\cdot((1+i)^n - 1)/i$.

Im Fall K_0 =100 stimmt die Gleichung für p% = i, im Fall $K_0 \neq 100$ ist die Rendite i aus (R5.6) zu berechnen. Ist die allgemeine Rendite i bekannt, liefert (R4.4) den Kurs K_0 einer Anleihe. Formel (R5.6) ist auch verwendbar, wenn die Anleihe nicht am Tag der Zinszahlung erworben wird. Dann ist K_0 der Kaufpreis, also der Kurswert zzgl. Tageszinsen (im Börsendeutsch Stückzinsen genannt) gemäß (R2.2). Wenn t die Restlaufzeit in Jahren ist, dann ersetzen wir in (R5.6) links n=t und rechts n durch t_+ = aufgerundete natürliche Zahl ≥ t.

7.2 Annuitätenkredit
Bei einem einmal gewährten Kredit K_0 heißt **Annuität** (lat. annus = Jahr) eine jährliche nachschüssige Zahlung A, die sich aus den Elementen Zins und Tilgung zusammensetzt. Der Endwert der Annuitäten ist eine geometrische Reihe $(A\cdot(1+i)^k)$. Dementsprechend lautet die Restschuld K_n nach n Jahren laut Äquivalenzprinzip (R5.2 ^zZ) und (R7.1)

K_0 Kreditbetrag mit Zinssatz i, n Anzahl Jahre, $A > K_0\cdot i$ jährliche Zahlung (Annuität)
(R7.3) Restschuld des Annuitätenkredits $\quad K_n = K_0\cdot(1+i)^n - A\cdot((1+i)^n - 1)/i$

Sobald K_n Null ist, ist der Kredit vollständig getilgt. Um n für K_n=0 zu berechnen, ist die Gleichung nach n aufzulösen: $(A - K_0\cdot i)\cdot(1+i)^n = A$. Wegen $A - K_0\cdot i = T$, (= 1. Tilgung) folgt $\log(1+i)^n = \log(A/T,)$ (gilt für jede Logarithmus-Basis) und weiter:

(R7.4) Laufzeit des Annuitätenkredits $n = \dfrac{\log(A/T,)}{\log(1+i)}$ $\quad$ A = Annuität, T, = 1. Tilgung

7.3 Risikokennzahl und Duration
Weiter geht's mit $^zZ(i,t) = (1+i)^t$. Wie ändert sich der Barwert $K = \Sigma_k\, C_k\cdot {}^zZ(i_0,-t_k)$ (s. (R5.2 ^zZ)) des Zahlungsstroms (C_k,t_k) $(t_k > 0)$, wenn sich der Marktzins i_0 um di ändert?

Hier hilft die Differenzialrechnung, indem wir die Funktion $K(i) = f(i) = \Sigma_k\, C_k\cdot {}^zZ(i,-t_k)$ nach der Variablen i ableiten: $K'(i) = \Sigma_k\, C_k\cdot(-t_k)\cdot {}^zZ(i,-t_k-1)$. Es gilt ja allgemein, dass die Ableitung von $g(x) = x^t$ ergibt: $g'(x) = t\cdot x^{t-1}$ für alle reellen Potenzen t außer für t=0. Mit di = 0,01% = 10^{-4} bezeichnet $W = 10^{-4}\cdot K'(i_0)$ den **Basispunkt(wert)**, der die Änderung des Barwerts K je 0,01% angibt. Jetzt stört noch, dass der Wert von der Größe von K abhängt. Als zum Barwert proportionale Änderung erhalten wir $_mD = |K'(i)/K(i)|$, wobei i der aktuelle Marktzins ist.

Damit ändert sich der Barwert K wie folgt

(R7.5) $\quad dK = -K(i)\cdot {}_mD\cdot di \qquad {}_mD = \left|\dfrac{K'(i)}{K(i)}\right|$,

wobei di die Zinsänderung ist, im Fall 0,1% = 0,001. Das Vorzeichen ist unwichtig, solange klar ist, dass K_0 mit wachsenden i fällt und umgekehrt steigt.

Durationen D und $_mD$

Interessant ist der Wert $D = (1+i)\cdot {}_mD = \dfrac{1}{K(i)}\,\Sigma_k\, t_k\cdot C_k\cdot {}^zZ(i,-t_k)$, der hier als gewichtetes Mittel der Zeitwerte t_k erscheint. Wegen $K = \Sigma_k\, C_k\cdot {}^zZ(i,-t_k)$ (s. oben) ist die Summe der Zeitgewichte gleich 1, so dass sich D als mittlere Laufzeit des Zahlungsstroms deuten lässt. D schwankt leicht mit dem Zinssatz i, weil sich die Gewichte für die t_k leicht verschieben, aber für einen Zerobond ist D exakt die Laufzeit. Seit der Einführung durch F. R. Macaulay 1930 wird D als **Duration** bezeichnet, d. h. als mittlere Laufzeit eines Zahlungsstroms oder Anleihe. $_mD$ heißt schlicht **modifizierte Duration** und zeigt, dass durch Zinssätze bedingte Kursschwankungen stark von der mittleren Laufzeit eines Zahlungsstroms abhängen.

8. Zinsstrukturkurven

Bis jetzt sind die Modelle von einem konstanten Zinssatz während des gesamten Zeitraums ausgegangen. In Wirklichkeit hängen die Zinssätze von der Dauer der Kapitalbindung ab, was durch eine Zinsstrukturkurve dargestellt wird (siehe L8). Normalerweise steigt der Zins mit der Bindungsdauer an, sie kann aber auch flach wie in den bisherigen Modelle oder ganz selten invers, wenn eine überdurchschnittliche Nachfrage nach Kapital oder eine deutliche Erwartung sinkender Zinssätze den Zinssatz für kurzfristige Anlagen höher treibt als den für langfristige Anlagen.
Produkte, die auf Standardprodukten fußen, d.h. von ihnen abgeleitet sind, heißen Derivate.

8.1. Vereinbarung über einen zukünftigen Zinssatz

Solche Verträge, allgemein Forward-Rate-Agreements (FRA) genannt, sind gut für Firmen, die Schuldzinsen für geplante Investitionen absichern wollen.
Beispiel: Die Firma KS braucht in 3 Monaten für 6 Monate 1 Mio. und Planungssicherheit bzgl. der Zinsen.
Ein 6-Monats-Kredit richtet sich nach bestimmten Referenzzinssätzen, z. B. den Euribor. Euribor steht für "Euro Interbank Offered Rate" und bezeichnet seit Einführung im Jahr 1999 den durchschnittlichen Zinssatz für Ausleihungen im Handel zwischen den Banken (separate Zinssätze für die Dauer 1 Woche bis 12 Monate). Der Euribor wird werktäglich um 11 Uhr mitteleuropäischer Zeit festgesetzt und veröffentlicht.
Mit dem Euribor (zzgl. bonitätsbedingtem Auf- oder Abschlag, Spread genannt) kennt KS den Zinssatz für 6 Monate ab heute, aber noch nicht in der Zukunft.
Hier hilft ein Forward-Rate-Agreement (FRA 3x9) (sprich „3 gegen 9“).
Die Vereinbarung eines **FRA t_1xt_2** umfasst die folgenden Parameter:

1. Der Beginn t_1 einer in der Zukunft liegenden, fiktiven Geldaufnahme (t_1 = 3 Mon.)
2. Das Ende t_2 der Anlageperiode (t_2 = 9 Monate)
3. fiktiver Nominalbetrag N als Basis
4. Der Zinssatz i_f (FRA-Satz oder Forward-Zins) für die vereinbarte Anlageperiode
5. Der Referenzzinssatz i_r für dieselbe Anlageperiode, typischerweise ein Geldmarktsatz wie (je nach Währung) der Libor oder Euribor.
6. Die Ausgleichszahlung zur Zeit t_1 proportional zur Zinsdifferenz $i_f - i_r$. Sie geht an den Käufer, wenn $i_f > i_r$, an den Verkäufer, wenn $i_f > i_r$.

Auf diese Weise sichert sich der Käufer KS das Darlehen so, als sei $i_r = i_f$ in 3 Monaten.
Problem: Ist i_f fair berechenbar? Ja, wenn die spot rates gegeben sind. Spot-Rates sind Zinssätze für Kassageschäfte (diskontierte Kredite oder Geldanlagen ohne Zinszahlungen vor dem Ende), aus denen z. B. der Euribor ermittelt wird. Sei s_1 der Zinssatz für 3 Monate, s_3 der Zinssatz für 9 Monate und $\underline{s}_1 = s_1 \cdot ¼$ und $\underline{s}_3 = s_3 \cdot ¾$ die Zinssätze relativ zur Anlagedauer. Dann sollte gelten:

$$(1+\underline{s}_1)\cdot(1+\underline{i}_f) = (1+\underline{s}_3)$$

Gilt das nicht, sind Arbitragegeschäfte möglich, wenn ein Händler kaufen und verkaufen kann. Im Fall $(1+\underline{s}_1)\cdot(1+\underline{i}_f) < (1+\underline{s}_3)$ leiht er sich Geld für s_1 (3 Monate) und kauft einen FRA3x9 und legt das geliehene Geld für s_2 an; er macht Gewinn ohne eigenes Kapitel. Im Fall > handelt er andersherum und macht auch Arbitragegewinne.

FRA-Beispiel. Sei s_1 = 1,1% und s_3 = 1,3%. Dann ist i_f = 1,4%. Im Vergleich dazu lautet der aktuelle Satz für 6 Monate s_2 = 1,2%. Der Zinssatz i_f muss so hoch sein, weil sonst Arbitragegeschäfte möglich sind.

Das FRA-Beispiel zeigt. Die Bewertung des FRAs hängt von den Spot-Rates ab. Der FRA ist ein **Derivat**, weil er von den Spot-Rates abhängt. Sind alle Spot-Rates gleich, d. h. die Zinsstrukturkurve flach, ist der FRA-Zinssatz auch gleich der Spot-Rate. Interessant wird die Berechnung, wenn sich die Spot-Rates entsprechend der Bindungsdauer unterscheiden.

8.2. Das No-Arbitrage-Prinzip

Arbitrage bedeutet Gewinn durch Handel ohne Eigenkapital. Modelle, die Arbitragegeschäfte erlauben, sind falsch. Daher sind Arbitragemöglichkeiten wichtige Argumente in der Finanzmathematik. Damit dieses Prinzip nicht eingeschränkt wird, gilt:
1. Kauf und Verkauf von Finanzgütern sind in beliebigem Umfang (Bruchteile und Leerverkäufe) möglich.
2. Der Zinssatz für Geldanlagen oder Kredite ist für alle Marktteilnehmer gleich.
3. Es gibt keine Gebühren für Transaktionen oder Depots.
Folgerung: Im Mittel ist keine bessere Rendite zu erwarten als der risikolose Zinssatz.

8.3. Zins-Swaps

Zins-Swaps tauschen einen festen Zinssatz gegen variable Zinssätze. Sie sind eine Folge von FRAs mit folgenden Parametern:

1. Festzinssatz (Swap-Satz) r_n für die Laufzeit von n Jahren
2. variabler Referenzzinssatz (z.B. Euribor, Libor) i_r
3. Länge der Zinsperioden
4. Termine und Berechnungsmethoden für Zinszahlungen
5. fiktiver Nominalbetrag als Basis

Zins-Swaps laufen ab sofort, Forward-Swaps beginnen den Zinstausch in der Zukunft. Die Zinsen werden jährlich gezahlt, daher bleibt bei normaler Zinsstrukturkurve der Zinssatz r_n unter dem für die Spotrate s_n.
Herleitung von Formeln siehe L5 (Luderer, MMM), Kap. 25 oder L6, Kap. 11.

9. Optionsscheine

9.1. Basiswissen gemäß Broschüre L2
Die europäische Option bedeutet das Recht, eine Ware zu einem festgelegten Termin T und Preis kaufen (Call-Option) oder verkaufen (Put-Option) zu dürfen (keine Pflicht). Die amerikan. Option bietet dieses Recht jederzeit bis zum Stichtag an. Dementsprechend besteht sie aus den Komponenten:
1. Basiswert (Underlying) und Größe, z. B. eine Aktie
2. Ausübungspreis E (Strike Price oder Exercise Price)
3. Ausübungsfrist oder –termin T.
Die Auszahlfunktion (= Wert C_T) einer Call-Option am Tag T beim Aktienkurs S_T ist dann $\max(0;S_T - E)$, die einer Put-Option beträgt $\max(0;E - S_T)$.

Beispiel für eine Call-Option:

Aktueller Kurs des Optionsscheines	$C_0 =$	€ 80
Aktueller Kurs der Aktie (Basiswert, Underlying)	$S_0 =$	€ 400
Basispreis (Ausübungspreis)	$E =$	€ 350
Optionsverhältnis (Aktie pro Optionsschein)	¢ =	0,5 (1 Aktie pro 2 O-Scheine)
Restlaufzeit (von heute bis Ausübungstermin)	$T =$	2 Jahre

Einfache Bewertungshilfen

Break-Even-Punkt (Mindestpreis S_T, für Gewinn)	$S_M = E + (C_0/¢)$
	€ 350 + (80/0,5) = € 510
Innerer Wert des Optionsscheines	$I_w = (S_t - E)\cdot ¢$
	€ (400 – 350)·0,5 = € 25
Zeitwert („Unsicherheitsaufschlag“)	$C_t - I_w$
$\lim_{t\to T} C_t - I_w = 0$	€ 80 – 25 = € 55
Aufgeld in Prozent (wenn die Aktie sofort mit der Option gekauft würde)	$(S_M - S_t)\cdot 100/S_t$ %
	(510 – 400)·100/400 % = 27,5%

Jährliches Aufgeld in % (pro Jahr)	$[(S_M - S_t)\cdot 100/S_t]/T$ (= 13,75%)
Hebel (maximaler Anstieg des Optionspreises)	$S_t\cdot ¢/C_t$
	$400\cdot 0{,}5/80 = 2{,}5$

Steigt der Aktienkurs S_t um 1%, dann steigt der Preis des Optionsscheins C_t max. um 2,5%. Diese Rechnungen können aber den Optionspreis nicht begründen. Das versucht nun die **Optionspreistheorie**, deren erster Grundsatz lautet, dass der Optionspreis C_t vom Aktienkurs S_T am Ausübungstag T und dem sog. „risikolosen" Marktzinsfaktor r abhängt:
$C_t = C_t(S_T, E, r, T\text{-}t)$. Bleibt die Frage der Aktienpreistheorie: Wie kommt S_T zustande?

9.2. Der Weg zum Black-Scholes-Modell gemäß L1: Die Option als Portfolio

Rechnerisch interessant ist folgendes Modell: Eine Aktie hat nach einem Jahr entweder den Wert 130 oder 80. Eine Call-Option hat den Ausübungspreis E = 110. Welchen Wert hat die Option, wenn die Aktie heute z. B. den Wert 100 hat?
Man kann die **Option als Portfolio**, das heißt als Kombination von der Anzahl x Aktien zum Aktienkurs S und der Geldmenge y inkl. Zinsfaktor r, darstellen und gelangt für den E-Tag T zu folgenden Gleichungen (vgl. L1, Kap. 5.2, S. 119ff):
$130x + r\cdot y = 20$ (Wert des Portfolios und der Option beim Aktienkurs 130)
$80x + r\cdot y = 0$ (Wert des Portfolios und der Option beim Aktienkurs 80).

Aus der 2. Gleichung folgt $y = -80x/r$ und damit aus der ersten: $x_0 = 0{,}4$ sowie $y_0 = -32/r$. Damit hat die Option den Anfangswert $C_0 = 0{,}4\cdot S_0 - 32/r$. Für $S_0=100$ und $r=1{,}03$ ergibt sich $C_0=8{,}93$. Weicht der Optionkurs ab, ist ein Arbitragegeschäft möglich. Ist der Optionspreis C_0 niedriger, verkauft ein Händler $0{,}4\cdot S_0$ Aktien für 40, kauft eine Option und hat mehr als 32/r Geld. Am Ausübungstag kauft er mit dem Optionserlös zu 20 bzw. 0 plus 32 Geld die 0,4 Aktien für 52 (= 0,4·130) bzw. 32 (= 0,4·80) zurück hat einen Gewinn, weil er anfangs mehr als 32/r Geld gehabt hat.

Allgemeiner wird das Gleichungssystem durch Faktoren d < r < u, (d = downside, u = upside), die den Aktienkurs S_0 (t=0) bis zum Ausübungstag T ändern:

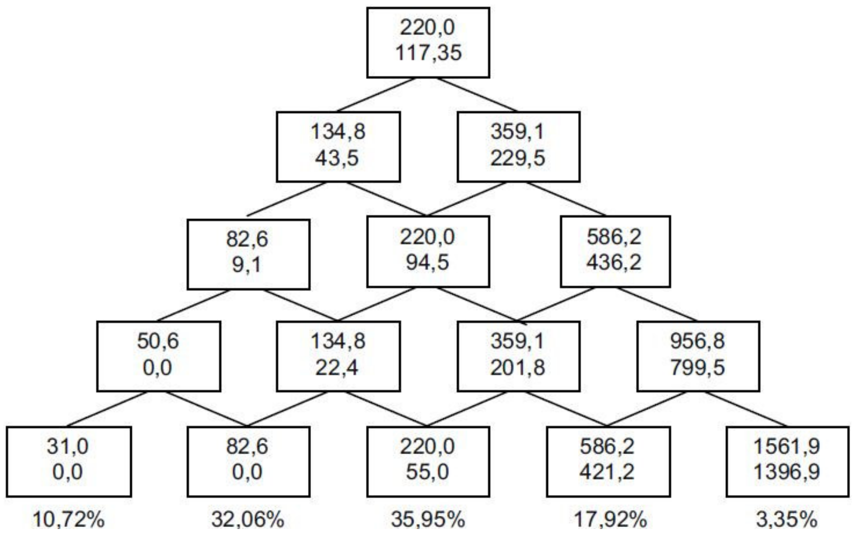
$$u\cdot S_0\cdot x + r\cdot y = {}^{\uparrow}C$$
$$d\cdot S_0\cdot x + r\cdot y = {}^{\downarrow}C.$$

Das äquivalente Portfolio lautet $x = ({}^{\uparrow}C - {}^{\downarrow}C)/[(u - d)\cdot S_0]$ Aktien und
$y = (u\cdot{}^{\downarrow}C - d\cdot{}^{\uparrow}C)/[(u - d)\cdot r]$ Geld. Daraus folgt als Optionspreis

$$C_0 = S_0\cdot x + y = {}^{\uparrow}C\,\frac{r-d}{(u-d)r} + {}^{\downarrow}C\,\frac{u-r}{(u-d)r}\,.$$

9.3. Stochastische Aktienmodelle (gemäß L1)

Jetzt kommt die Stochastik ins Spiel. Wegen No-Arbitrage ist $r\cdot C_0$ der stochastische Erwartungswert von C_T am Stichtag. Daher lassen sich die Faktoren von ${}^{\uparrow}C$ und ${}^{\downarrow}C$ als Wahrscheinlichkeiten P(X) für das Steigen und Sinken von S_t deuten:
$P(X=u) = p = \frac{r-d}{u-d}$ und $P(X=d) = 1\text{-}p = \frac{u-r}{u-d}$. p liegt zwischen 0 und 1. Wie so etwas aussehen könnte, zeigt ein Schema von Thomas Heidorn (Buch L4) mit folgenden Daten:
$S_0 = 220$, E = 165,
T = 1 Jahr, unterteilt in Quartale,
u = 1,6323, p = 0,4278,
d = 0,6126, 1-p = 0,5722,
r = 1,21 p. a. (= 21%; pro Quartal $r_{1/4} = 1{,}049$).



Die 1. Zeile der Kästchen zeigt den Aktienkurs S an. $S_0 = 220$ als Startwert für $t = 0$; am Ende des 1. Quartals ist $S_{¼} = 134{,}8$ oder 359,1. In der 1. Zeile der unteren Kästchen ($k = 0,\dots,4$) stehen die möglichen Aktienkurse S(T,k) und darunter abgeleitet die Optionspreise C(T,k) = S(T,k) – E, sofern > 0, z. B. 55 = 220 – 165. Die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten von S(T,k) folgen aus dem Binomialschema des Pascal'schen Dreiecks (die Zählung der Kästchen beginnt von links und oben mit k, n = 0):

$17{,}92\% = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \binom{4}{3} \cdot 0{,}4278^3 \cdot 0{,}5722 = 4 \cdot 0{,}0783 \cdot 0{,}5722.$

Ausgehend von den Optionspreisen der letzten Zeile werden rückwärts alle Optionspreise entsprechend p und 1-p berechnet, z. B. $799{,}5 = [1396{,}9 \cdot p + 421{,}2 \cdot (1-p)]/r_{¼}$. Am Schluss wird $C_0 = 117{,}35$ berechnet. Wozu ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung p_k der letzten Reihe S(T,k) gut? Sie liefert einen Erwartungswert $E^*(C_T) = \Sigma_k\, C(T,k) \cdot p_k$, der $C_0 = E^*(C_T)/r$ mit weniger Rechenaufwand liefert.

Das **Black-Scholes-Modell** postuliert für die logarithmierte Aktienrendite eine Normalverteilung mit dem Mittelwert μ (sog. **Drift** des Aktienkurses) und der Standardabweichung (= **Volatilität**) σ pro Zeiteinheit und weiter: $\ln d_T = \mu \cdot T - \sigma\sqrt{T}$ und $\ln u_T = \mu \cdot T + \sigma\sqrt{T}$.

Nun wird das Zeitintervall (0,T) in n Schritte der Länge t = T/n zerlegt mit n Mal Auf oder Ab wie in der Brown'schen Bewegung. Dann ist die Wahrscheinlichkeit für den Aktienkurs S_T

$P(S_T = u^k \cdot d^{n-k} \cdot S_0) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$.

Wann ist $u^k \cdot d^{n-k} \cdot S_0 \geq E$ (= Ausübungspreis)? Für $k \geq a$, wobei sich a errechnet aus
$u^a \cdot d^{n-a} \cdot S_0 = E$, also
$a = \ln[E/(d^n \cdot S_0)]/\ln(u/d)$. In diesem Binomialmodell ist der Optionspreis

$C_0 = r^{-n} \cdot \Sigma_{k\geq a} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \cdot (u^k \cdot d^{n-}k \cdot S_0 - E).$

Mit $q = p \cdot u/r$ und $1-q = (1-p) \cdot d/r$ entstehen (Pseudo-)Wahrscheinlichkeiten als Faktoren von S_0; es gilt $0 < q < 1$.
Über aufwändige Grenzprozesse entsteht die Normalverteilung mit der Standardabweichung $\sigma\sqrt{T}$ und die Black-Scholes-Formel für die Berechnung des Optionspreises. Dabei werden die Wahrscheinlichkeiten zu p = ½. Die Aktiendrift μ verschwindet im risikolosen Zinsfaktor r = 1 + i.
Sei $E_0 = r^{-T} \cdot E$ der Barwert des Ausübungspreises. Unter Benutzung der Gauß'schen Verteilungsfunktion Φ lautet die
Black-Scholes-Formel $\mathbf{C_0 = S_0 \cdot \Phi(d_1) - E_0 \cdot \Phi(d_2)}$.

$d_1 = \ln(S_0/E_0)]/(\sigma\sqrt{T}) + ½\, \sigma\sqrt{T}$. $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$. $\Phi(d_2)$ ist Wahrscheinlichkeit für $S_T > E$. $\Phi(d_1)$ beschreibt die Abhängigkeit $\Delta = dC/dS$ des Optionspreises C von Aktienkurs S und gibt den Aktienanteil für äquivalentes Portfolio an. Details siehe Luderer, MMM.

Aus M. Adelmeyer, E. Warmuth, Finanzmathemaik für Einsteiger (L1, S. 149):
„Das Verschwinden von μ ist vergleichbar mit dem Verschwinden von p, der Wahrscheinlichkeit für eine Aufwärtsbewegung des Aktienkurses, bei der Preisbildung im Binomialmodell. An die Stelle von p trat dort die risikoneutrale Wahrscheinlichkeit. Bezüglich dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung hat die Aktie im Mittel dieselbe Rendite wie eine risikolose Anlage mit Zinssatz i. Grob gesprochen haben wir hier denselben Effekt. Die mittlere Rendite μ wird ersetzt durch den risikolosen Zinssatz i und nur dieser geht in die Black-Scholes-Formel ein.
… 1973 publizierten FISHER BLACK und MYRON SCHOLES die heute nach ihnen benannte Optionspreisformel. Im gleichen Jahr erschien eine Arbeit von ROBERT C. MERTON zur Preisbildung bei Optionen. Im Jahre 1997 ging der Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften an MERTON und SCHOLES. Die NEUE ZÜRCHER ZEITUNG

schrieb dazu am 15.10.97: *Die Schwedische Akademie der Wissenschaften verweist in der Begründung ihres Entscheids auf die von den Amerikanern erarbeitete „bahnbrechende Formel für die Bewertung von Aktienoptionen Besonders hervorgehoben wird, dass der dabei entwickelte Denkansatz nicht nur bei den Finanzmarktprodukten Anwendung fand, sondern allgemein zur Lösung von wirtschaftlichen Bewertungsproblemen beitrug.* In der Begründung für den Nobelpreis wurde auch BLACK, der 1995 verstorben ist, namentlich erwähnt."

Merton und Scholes waren im Direktorium des Hedgefonds Long-Term Capital Management (LTCM). Die Schieflage des Fonds 1998 bedrohte das internationale Finanzsystem; eine Finanzkrise konnte durch eine Rettungsaktion abgewendet werden und der Fonds wurde bis 2000 endgültig aufgelöst.

10. Literaturquellen

Abkürzungen: kF = klassische Finanzmathematik, d. h. Zins- und Renditerechnung ohne Stochastik und Optionen, SO = Schulbuch für die Oberstufe von Wirtschaftsgymnasien, eB = in Uni-Bibliotheken als e-Book verfügbar.)

L1. Moritz Adelmeyer, Elke Warmuth, Finanzmathematik für Einsteiger, 2. Aufl. 2005, SO. kF recht knapp in Kap. 1, sonst Oberstufen-Stochastik notwendig, detaillierte Herleitung der Black-Scholes-Formeln für Aktien und Optionen.
L2. Basisinformationen über Vermögensanlagen in Wertpapieren, Bank-Verlag 2014. Erhältlich in depotführenden Banken.
L3. Effektivzinssatz laut Preisangabenverordnung, https://www.gesetze-im-internet.de/pangv/anlage.html.
L4. Thomas Heidorn, Finanzmathematik in der Bankpraxis, 6. Aufl. 2009, eB.
L5. Bernd Luderer, Mathe, Märkte und Millionen, 2013, eB. Geschichten mit Formeln ohne Herleitung; anspruchsvoll die Kapitel 29 bis 33 über die Black-Scholes-Formel für Optionen.
L6. Bernd Luderer, Starthilfe Finanzmathematik, 4. Aufl. 2015, SO, eB. kF inkl. Zinsstrukturen und Forward Rates, ohne Optionen.
L7. Jürgen Tietze, Einführung in die Finanzmathematik, 11. Aufl. 2011, eB.. kF ohne Zinsstrukturen, aber mit Ausblick auf Optionen.
L8. Wikipedia-Stichwörter: Geometrisches Mittel, Zinsstruktur.
L9. Katrin Wendland, Annette Werner (Hrsg.), Facettenreiche Mathematik, 2011, eB. Darin: Nicole Bäuerle, Luitgard A. M. Veraart, Optionsbewertung und Portfolio-Optimierung. Vicky Fasen, Claudia Klüppelberg, Modellieren und Quantifizieren von extremen Risiken.
Grundlagen der Stochastik:
L10. Gerhardus (Schallenkamp), Elemente der Stochastik bis χ^2-Unabhängigkeitstest, http://matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/article.php?sid=1441.