# Transformation von Kurven (9. Schuljahr) von G. Schallenkamp, 2019

Funktionen und Abbildungen beschreiben, wie variable Größen voneinander abhängen. Die **Funktionsgleichung $y = f(x)$** besagt, dass die Variable y von dem **Argument** x abhängt, und zwar eindeutig. Jedem x-Wert ist eindeutig ein y-Wert zugeordnet. Ihre **Graphen** machen Funktionen anschaulich, vorzugsweise als Punkte der x-y-Ebene im kartesischen Koordinatensystem. Lineare Funktionen $y = mx + b$ erscheinen dort als Geraden, quadratische Funktionen $y = ax^2 + bx + c$ als Parabeln. Da ihre Punkte nicht isoliert sind, sondern zusammenhängen, heißen diese Graphen auch **Kurven**. $y = f(x)$ heißt explizite Form der Funktion, $g(x,y) = C$ implizite Form, Beispiel folgt.

Die allgemeine **Geradengleichung** lautet $Ax + By = C$. Wenn $B \neq 0$ ist, ist sie in expliziter Form darstellbar: $y = -(A/B)x + C/B$. Die Gleichung $x = C$ beschreibt eine Gerade parallel zur y-Achse und ist keine Funktion.

$g(x,y) = Ax + By$ ist eine Funktion von zwei Variablen; die Gleichung $g(x,y) = C$ beschreibt eine Abhängigkeit zwischen x und y, sie ist im allgemeinen keine Funktion, sondern eine Relation. Der Begriff **Relation** ist sehr allgemein definiert als Teilmenge von $M = \{(x,y)\}$, also anschaulich ein Teil der x-y-Ebene; das kann eine Kurve sein, ein Flächenstück oder eine Halbebene. $(x,y)$ bezeichnen **geordnete Paare**, $(x|y)$ ebenfalls, aber mit dem Aspekt als Punkte der x-y-Ebene.

Hier betrachten wir Kurven in der x-y-Ebene, dazu gehören Geraden, Parabeln, Kreise, Hyperbeln. Sie sind im Grunde zusammenhängend, können aber auch aus getrennten Teilkurven wie die Hyperbel $x \cdot y = 1$ bestehen.

Hier betrachten wir folgende Kurvengleichungen:

| | |
|---|---|
| Geradengleichung | $Ax + By = C$ |
| Normalparabel (Scheitel im Ursprung) | $y = x^2$ (zur y-Achse geöffnet) |
| oder | $y^2 = x$ (zur x-Achse geöffnet) |
| Kreis um den Ursprung mit Radius r | $x^2 + y^2 = r^2$ |
| Hyperbel | $x \cdot y = 1$ |

Wir untersuchen nun Transformationen in der x-y-Ebene. Dazu gehören Verschiebungen, Drehungen und Streckungen von geometrischen Figuren. Allgemein ist eine **Transformation** eine umkehrbare Abbildung $T:(x|y) \rightarrow (x^*|y^*)$ mit $x^* = t_x(x,y)$ und $y^* = t_y(x,y)$, wo jeder Originalpunkt genau einen Bildpunkt hat, und jeder Bildpunkt genau einen Originalpunkt. Die Umkehrabbildung heißt $T^{-1}:(x^*|y^*) \rightarrow (x|y)$ und es gilt $T^{-1}(T(x,y)) = (x|y)$.

| Beispiele | | mit Umkehrung (Inversion) |
|---|---|---|
| Parallelverschiebungen (Translationen) | | |
| - parallel zur x-Achse | $T(x,y) = (x+x_S\|y)$ | $T^{-1}(x,y) = (x-x_S\|y)$ |
| - parallel zur y-Achse | $T(x,y) = (x\|y+y_S)$ | $T^{-1}(x,y) = (x\|y-y_S)$ |
| 90°-Drehung um (0\|0) | $T(x,y) = (-y,x)$ | $T^{-1}(x,y) = (y\|-x)$ |
| Streckung mit dem Streckungsfaktor $k \neq 0$ | | |
| - zentrisch von (0\|0) aus | $T(x,y) = (k \cdot x\|k \cdot y)$ | $T^{-1}(x,y) = (x/k\|y/k)$ |
| - parallel zur x-Achse | $T(x,y) = (k \cdot x\|y)$ | $T^{-1}(x,y) = (x/k\|y)$ |
| - parallel zur y-Achse | $T(x,y) = (x\|k \cdot y)$ | $T^{-1}(x,y) = (x\|y/k)$ |
| Anmerkung: Die Streckung ist geradentreu, d. h. bildet eine Gerade auf eine Gerade ab. | | |
| Spiegelung | | |
| - am Nullpunkt | $T(x,y) = (-x\|-y)$ | $T^{-1} = T$ |
| - an der Achse $x = x_S$ | $T(x,y) = (-x+2x_S\|y)$ | $T^{-1} = T$ |
| - an der Achse $y = y_S$ | $T(x,y) = (x\|-y+2y_S)$ | $T^{-1} = T$ |
| - an der Achse $y = x$ | $T(x,y) = (y\|x)$ | $T^{-1} = T$ |

Um die Punkte $(x|y)$ an der Achse $x = x_S$ zu spiegeln, verschieben wir sie erst um $-x_S$, spiegeln sie dann an der y-Achse und verschieben sie dann um $x_S$ zurück. Also erst $x' = x - x_S$, dann $x'' = -x' = x_S - x$ und dann $x^* = x'' + x_S = 2x_S - x$. Analog wird an der Achse $y = y_S$ gespiegelt.

Eine Transformation $T(x,y) = (t_x(x,y)|t_y(x,y))$ überführt den Graphen $G = \{(x|f(x))\}$ der Funktion $y = f(x)$ in den Graphen $G^* = \{(t_x(x,y)|t_y(x,y))\}$, also für die Translation $T(x,y) = (x+x_S|y+y_S)$ in $G^* = \{(x+x_S|f(x)+y_S)\}$. Damit die x-Komponente Argument der neuen Funktion bleibt, benötigen wir $G^* = \{(x^*|f^*(x^*))\}$ und erhalten das mittels $x^* = x+x_S$ oder $x = x^* - x_S$, d. h. $G^* = \{(x^*|f(x^*-x_s)+y_S)\}$.

Offenbar ist $x^* = t_x(x,f(x))$ umzukehren zu $x = h(x^*)$. Das ist im allgemeinen ein Problem, aber es gibt eine Variante, die sogar für allgemeine Kurvengleichungen $g(x,y) = C$ funktioniert, deren Punkte nicht immer explizit wie oben darstellbar sind.

Problem: Die Transformation T transformiert die Kurve K mit der Gleichung $g(x,y) = C$ in die Kurve $K^*$, deren Gleichung $g^*(x,y) = C^*$ gesucht wird.

Jeder Punkt von $K^*$ ist ein Bildpunkt $(x^*|y^*)$ von T, dessen Original $(x|y) = T^{-1}(x^*,y^*)$ auf der Kurve K liegt. Aber nun ist $g(T^{-1}(x^*,y^*)) = g((x|y)) = g(x,y) = C$ die Originalkurvengleichung und die neue Gleichung lautet folglich $g^*(x^*,y^*) = g(T^{-1}(x^*,y^*))$ für alle Punkte $(x^*|y^*)$ der Kurve $K^*$. Wenn die Punkte $(x^*|y^*)$ nicht von $(x|y)$ unterschieden werden müssen, heißen sie wieder $(x|y)$.

Satz: $T:(x|y) \rightarrow (x^*|y^*)$ transformiere die Kurve K der Gleichung $g(x,y) = C$ in die Kurve $K^*$. Die Gleichung von $K^*$ lautet dann $g^*(x,y) = g(T^{-1}(x,y)) = C$.

Beispiele mit Anwendungen von $T^{-1}$:

| | |
|---|---|
| Verschiebung parallel zur x-Achse | $g^*(x,y) = g((x-x_s|y)) = g(x-x_s,y) = C$ |
| Parabel $y = f(x) = x^2$ | $y = f^*(x) = f(x-x_s) = (x-x_s)^2$ |
| Verschiebung parallel zur y-Achse | $g^*(x,y) = g(x|y-y_s) = C$ |
| Parabel $y = f(x) = x^2$ | $y-y_s = f(x) = x^2 \Leftrightarrow y = x^2 + y_s$ |

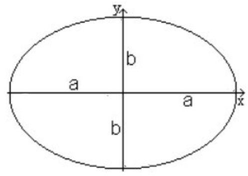
Allgemeine Verschiebung $T(x,y) = (x+x_s|y+y_s)$.

| | |
|---|---|
| - Normalparabel mit Scheitelpunkt $(0|0)$ | $y = x^2$ bzw. $y^2 = x$ |
| - Normalparabel mit Scheitelpunkt $(x_s|y_s)$ | $y-y_s = (x-x_s)^2$ bzw. $(y-y_s)^2 = x-x_s$. |
| - Der Kreis mit dem Mittelpunkt $(0|0)$ | $x^2 + y^2 = r^2$ |
| - Der Kreis mit dem Mittelpunkt $(x_s|y_s)$ | $(x-x_s)^2 + (y-y_s)^2 = r^2$. |

Streckung mit dem Streckungsfaktor k

| | |
|---|---|
| - parallel zur x-Achse | $g^*(x,y) = g((x/k|y)) = g(x/k,y) = C$ |
| Parabel $y = f(x) = x^2$ | $y = f^*(x) = f(x/k) = (x/k)^2$ |
| - parallel zur y-Achse | $g^*(x,y) = g((x|y/k)) = g(x,y/k)= C$ |
| Parabel $y = f(x) = x^2$ | $y/k = f(x) = x^2 \Leftrightarrow y = k\cdot x^2$ |

Aus dem Kreis $x^2 + y^2 = 1$ entsteht mit den Streckfaktoren $k_x = a$ und $k_y = b$ die **Ellipse** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, die die Achsen in den 4 Punkten $(\pm a|0)$ und $(0|\pm b)$ schneidet.




| | |
|---|---|
| Spiegeln an der x-Achse | $g^*(x,y) = g((x|-y)) = g(x,-y) = C$ |
| Parabel $y = f(x) = x^2$ | $-y = f(x) = x^2 \Leftrightarrow y = -x^2$ |
| Spiegeln an der y-Achse | $g^*(x,y) = g((-x|y)) = g(-x,y) = C$ |
| Parabel $y = f(x) = x^2$ | $y = f^*(x) = f(-x) = (-x)^2 = x^2$ |
| Spiegeln an der Achse $y = x$ | $g^*(x,y) = g((y|x)) = g(y,x) = C$ |
| Parabel $y = f(x) = x^2$ | $x = y^2$ |

## Kurvengleichungen mit Parametern

Bisher waren in den Gleichungen $g(x,y) = C$ alle Konstanten ohne geometrischen Bezug zur Kurve oder dieser Bezug ergab sich beiläufig wie bei der Normalparabel mit Scheitelpunkt $(x_s|y_s)$ oder bei dem Kreis mit dem Mittelpunkt $(x_s|y_s)$. Mit unserer Formel lassen sich diese Kurven verschieben und wir erhalten problemlos den neuen Scheitel- oder Mittelpunkt.

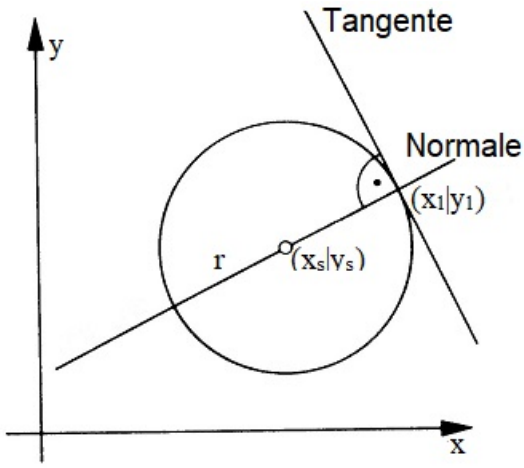
Anders sieht es aus mit einer Normalengleichung $\frac{y}{x} = \frac{y_0}{x_0}$ zu einem Punkt $(x_0|y_0)$ auf dem Kreis $x^2 + y^2 = r^2$. Die Gerade läuft durch den Ursprung und heißt Normale, weil sie den Kreis orthogonal schneidet. Wenden wir unsere Formel auf die Translation $T(x,y) = (x+x_s|y+y_s)$ an, bleibt der Punkt $(x_0|y_0)$ da, wo er war. Wir wollen aber diesen Punkt genauso verschieben und eine Gleichung für den Punkt $(x_1|y_1) = (x_0^*|y_0^*)$. Dazu bauen wir den Punkt als Parameter ein, so dass die allgemeine Form der Kurvengleichung lautet:

$g((x|y),(x_0|y_0)) = C$. $T(x,y):(x|y)\rightarrow(x^*|y^*)$ transformiert nun nicht nur die Punkte $(x|y)$, sondern auch den Punkt $(x_0|y_0)$ zum Punkt $(x_1|y_1)$. Damit lautet unser Satz:

> $T(x,y):(x|y)\rightarrow(x^*|y^*)$ transformiere die Kurve K der Gleichung $g(x,y,x_0,y_0) = C$ inkl. $(x_0|y_0)$ in die Kurve $K^*$. Die $K^*$-Gleichung lautet dann $g^*(x,y,x_1,y_1) = g(T^{-1}(x,y),T^{-1}(x_1,y_1)) = C$.

Nach der Transformation $T(x,y) = (x+x_s|y+y_s)$ lautet daher die obige Normalengleichung

$\frac{y - y_S}{x - x_S} = \frac{y_1 - y_S}{x_1 - x_S}$ ($= \frac{y - y_1}{x - x_1}$, mit der Invarianz der Differenzenquotienten für Punkte der Geraden ist die Gleichung sofort klar).




Zum Schluss noch die Tangente an den Kreis im Punkt $(x_0|y_0)$. Von der Normalen $g(x,y) = x_0y - y_0x = 0$ führen eine 90°-Drehung um $(0|0)$ $T_1(x,y) = (-y,x)$ und die Translation $T_2(x,y) = (x+x_0|y+y_0)$ zur Tangente $g^*(x,y) = g(T^{-1}(x,y))$ mit $T^{-1}(x,y) = T_1^{-1}(T_2^{-1}(x,y)) = (y-y_0|x_0-x)$. Aus der Normale $x_0y - y_0x = 0$ entsteht also die Tangente $g^*(x,y) = x_0(x_0-x) - y_0(y-y_0) = 0$
$\Leftrightarrow$ $x_0x + y_0y = x_0^2 + y_0^2 = r^2$.

> Tangente an Kreis in $(x_0|y_0)$ $\quad x_0x + y_0y = r^2$

Die Translation $T(x,y) = (x+x_s|y+y_s)$ des Kreises inkl. Punkt $(x_0|y_0)$ zu $(x_1|y_1)$ führt zur Tangente $(x_1-x_S)(x-x_S) + (y_1-x_S)\cdot(y-y_S) = r^2$ im Punkt $(x_1|y_1)$, siehe Bild.

Die Streckung des Kreises ($r = 1$) zur Ellipse mit den Faktoren a und b führt zu

> Tangente der Ellipse um $(0|0)$ im Punkt $(x_0|y_0)$ $\quad \frac{x_0\cdot x}{a^2} + \frac{y_0\cdot y}{b^2} = 1$

Eine Translation $T(x,y) = (x+x_s|y+y_s)$ verändert die Differenzen $x-x_1$, $y-y_1$ nicht, wenn der Punkt $(x_1|y_1)$ mitwandert. Solche Differenzterme ändern sich dann durch $T(x,y)$ in der Kurvengleichung nicht.

Literatur:
Meyers kleine Enzyklopädie Mathematik, Meyers Lexikonverlag 1995, Kap. 5 und 13.
https://www.lernhelfer.de/schuelerlexikon/mathematik-abitur/artikel/funktionenscharen-verschiebung-streckung-stauchung-und.
http://www.mathematische-basteleien.de/ellipse.htm.